算数科“量と測定”領域教材研究
—— 基 礎 (1) ——

宮 下 英 明

“Quantities and Measurement” in Elementary School Mathematics
—— Foundation (1) ——

Hideaki MIYASHITA

目 次

昭和63年 4 月30日受理

1　量の対象化

1.1　量＝読み(ことば)

量は，モノ(事態)でもモノの“属性”でもない。量は，モノに対する読みである。あるいは，モノに対する読みであることによって，対象として意識されるところのものである。

モノに対して“量”という読みを為すことが，“量の対象化”である。モノに量が読まれることによって，そのモノは“量の現象”（あるいは，この意味での“量の表現”)になる。“量の現象”は実践の結果であり，結果論である。現象の以前に量があるのではない。

“量”の読みは単一ではない。

文法的に互いに区別される読みということで，ここで“量(形式)”，“量(カテゴリー)”，“量(大きさ)”の三つを挙げる。これらはつぎのような具合に使われることばであるとする：“2cm，このコップの重さ，一日の長さはそれぞれ量(大きさ)”；“かさ，長さ，重さ，時間，速さはそれぞれ量(カテゴリー)”；“量(カテゴリー)のかさ，長さ，重さ，時間，速さに共通の形式としての量(形式)”。

なお，本論では，“量”ということばを，量(形式)，量(カテゴリー)，量(大きさ)のいずれかの意味で使っている。どの意味であるかが文脈から明らかなときか，あるいは“量(形式)”，“量(カテゴリー)”，“量(大きさ)”のいずれの読みの換えも可能なとき，単に“量”と言っている。

“量(形式)”，“量(カテゴリー)”，“量(大きさ)”の区別が文法上のものであるのに対し，“かさ”，“長さ”，“重さ”，“時間”，“速さ”という読みの違いは，文法上のものではない(§2.2)。

モノに量を読むこと――モノを量として言語化すること――は，ひとの恣意である。量は，モノの含意ではない。ひとが，モノの上に量の読みを投企するのである。

そこで特に，一つのモノに対し異なる量を読むことが可能である。また逆に，異なるモノに同じ量を読むことが可能である。

例えば，一つの事態としての物体の落下に対し，ひとは“時間”，“距離”，“速度”，“重さ”，“力”といった色々な量（カテゴリー）の読みをすることができる。また，つぎのような異なる事態に対して，ひとは等しく“重さ”という読みをすることができる：

- ゴムひもに物をつるすとひもが伸びる
- バネの上に物をのせるとバネが縮む
- シーソー遊び
- 将棋倒しの下敷きになって苦しい
- 両手の荷物のバランス
- そばを車が通り過ぎるときの地響

1.2　形而上学(イデア論)の傾向

モノ（事態）に量を読み量を対象化するということを一旦為すと，われわれはつぎに，モノを量の表現のように考えるということをする。実際，≪モノに量が示されている≫という捉え方を反転させれば，≪量の表現としてのモノ≫という発想の仕方になる。

実際は，モノのみが実在するものであって，量は＜幻想＞なのであるが，いまや意識の中では，モノは量の媒体ないし量の潜在形態として身分づけられ，＜量＝幻想＞が＜モノ＝実在＞の上に置かれるようになる。確固たる対象は量の方であって，モノは偶然的なものとなる（イデア論！）。

例えば，物をゴムひもにつるすとゴムひもが伸び，バネの上にのせるとバネが縮むという事態が，重さの表現のように意識される。重さの一つの偶然の現われ（具現）のように意識される。

1.3　量の図式

1.3.1　図　　　式

われわれは，量の“イメージ化”を試みることがある。量の“イメージ”は，実在のレベルでは，何がしかのモノ（事態）である。そしてそれが量の“イメージ”になっているのは，それの読み方が与えられているからである。

“読み方が与えられているモノ”の概念を表わすことばとして，以下“図式（シェマ)”を使うことにする。

図式は，読み（ことば）を伴うモノである。それは，モノと読みの対である。但し，読みが約束として了解されていれば，読みの明示は省略できる。このとき，図式は約束の上で保っている。約束が知られていなければ，それはモノに還る。

モノはそれに“量”が読まれるとき，結果論として“量の表現”になる。しかし図式は，このような結果論としての“表現”ではない。但し，量の表現として一旦捉えられたモノは，量の図式とすることができる。

例えば，日差しに応ずる棒の影の移動は，それに時刻／時間が読まれることで時刻／時間の表現になる。そしてこれに対しては，“時刻／時間の図式”――“日時計”――の読み換えをしようと思えばできる。

図式は，論理的対象である。即ち，対象としてのそれは，量が考えられている論理の中のことばと等価である。ことばと等価であるのに図式がことさらに作り出されるのは，あくまでも思考の便宜のため（ことばの操作は，図式の操作の形で行なうと楽になることがある）である。

1.3.2　図式としてのはかり

前節で述べた“図式”の意味において，はかりは量の図式である。

例えば，アナログ時計，デジタル時計，日時計，水時計，砂時計，腹時計等々は，時間という量の異なる図式である。

1.4　量の言語ゲーム

1.4.1　量(形式)の適用

モノ(事態）に対する量(形式）の適用は，言語ゲームである。

例えば，“$40^{km}/_{h}$ の自動車と $60^{km}/_{h}$ の自動車”と言うときの $40^{km}/_{h}$ と $60^{km}/_{h}$ に対しては，ひとはその間に加法を考えることはしない。

1.4.2　“保存性”の発想の無意味性

“量の保存性”は重さ以外の量（カテゴリー）にも主題化されるが，ここでは“重さの保存性”に代表させて，この発想の無意味性を指摘してみる。

重さの保存性は，“粘土玉を伸ばしても重さは変わらない”といった言い回しで語られる。

いま，粘土玉を伸ばして重さが変わったとしよう。はかりについては疑わないとすれば，われわれはこのことに対してどのような反応をするか。重さに対する考え方を改めるということはしない。世の中がおかしくなったか或いは自分がおかしくなっていると考えるのが自然なのである。(朝目覚めると周りの物がみな2倍の大きさになっていたとしたらどうだろう。われわれは物の大きさに対するこれまでの考え方を改めるということをするだろうか。そうはしない。何かがおかしくなったと考えるのみである。“重さの保存”の崩壊は，これと全く同じ種類の出来事なのである。)

“粘土玉を伸ばすと重さが変わる”という事態は，重さに対する考え方を修正するものにはならない。粘土玉を伸ばすことで変わる“重さ”は，われわれの“重さ”とは無関係な何か他の概念（たまたまことばが同じな）ということになるのみである。この意味で，重さは，粘土玉を伸ばすことで変わるということができないのである。したがって，“粘土玉を伸ばしても重さは変わらない”と言い回しは無意味なのである。ウィトゲンシュタインの言い方に倣えば，この言い回しはわれわれの生活――言語ゲーム――において占める場所をもたないのである。

繰り返すが，重さは，粘土玉を伸ばすことで変わるということができない。それが変わるとは，世の中が変わるということである。実際，このときには，重さが関わる生活がすべて破綻する。(はかり売りが無効になる，体重が無効になる，……。)

重さに対して生活が展開されるというのではない。生活の形態の一つが重さなのである。再びウィトゲンシュタインに倣って言えば，重さは言語ゲームの中にある。そしてこの言語ゲー

ムでは，“粘土玉を伸ばしても重さは変わらない”の言い回しは，端的に無意味なのである。それは，奇妙な，病的な言い回しであり，あり得ない言い回しなのである。

“重さの保存性”のことばを言い出すとすれば，それは，≪重さの言語ゲーム≫という主題に対してである。“重さはしかじか”という形で重さを論じるときのその主題の名を≪重さ≫と言うことにすれば，“重さの保存性”は≪重さ≫の内容にはならない。“重さはしかじか”のつもりで“重さの保存性”を言い出すことは出来ないのである——≪あり得ない言い回しである≫という理由で。

2　量(形式)，量(カテゴリー)，量(大きさ)

2.1　量(形式)

2.1.1　量(形式)

量(形式)は，量(カテゴリー)の論理である——≪量(カテゴリー)とは，量(形式)を論理としてもつもののこと≫の意味で。そこで，量(形式)としてどのようなものを考えることにするかで，一つの読みは量(カテゴリー)になったりならなかったりする。

例えば，量(形式)として全順序(線型順序)の構造のみを考えることにすれば，“硬度”という読みは量(カテゴリー)になる。しかし，量(形式)として代数的構造を考えることにすれば，“硬度”は量(カテゴリー)ではなくなる。

本論で考えることにする量(形式)は，第4章で述べられる。

この量(形式)では，三つの異なる身分の対象が登場させられる。量(大きさ)と，量(大きさ)の差と，そして量(大きさ)の差の比である。そしてこれらの対象の相関的在り方が，1次元順序位相アフィン空間 $(Q, ((D, +), (N, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$ (N は有理数体 $\mathbb{Q}$ か実数体 $\mathbb{R}$)の概念で以って規定される。

2.1.2　“離散量・稠密量”

“離散量(分離量)”，“稠密量(連続量)”という言い回しに出会うことがあるが，この場合の“離散”，“稠密”は，量(形式)を限定する論理的概念として捉えるのが適当である——但しそれ以外ではあり得ないという意味で。

実際，“離散”，“稠密”は構造としての量を限定する概念であり，構造としての量は量(形式)である。そして量(形式)＝読みを限定するような語は，この読みの論理の中になければならない。

“離散”と“稠密”の形式的概念規定——互いに排反する概念として——は，§4.3.4で行なう。

モノ(事態)に対する“離散量”，“稠密量”の読みは，恣意である。モノに対してどちらの読みをすることも自由である。これに対し，一旦読まれた量(形式)に対して“離散”あるいは“稠密”を恣意的に読むことはできない。離散か稠密かは，その量(形式)の論理的含意だからである。量(形式)に対する離散，稠密の関係は，＜恣意＞ではなく＜論理的必然＞である。

離散と稠密は，排反する論理的概念である。そこで特に，量(形式)を含意とする量(カテゴリー)の色々は，離散量と稠密量に二分されることになる。各量(カテゴリー)は，論理によって，離散量か稠密量かのどちらかである。

なお，本論では，従来“稠密量”の意味で使われている“連続量”の言い回しを，文字どおり“連続量”——“連続”は，“デデキント(Dedekind)切断”の概念で定義される概念——の意味で使うことにする(§4.3.5)。

2.1.3　量(形式)の現定式化の妥当性

量(形式)を“1次元順序位相アフィン空間 $(Q, ((D, +), (N, +, \times), {}_{\times}), {}_{+})$ (N は $\mathbb{Q}$ か $\mathbb{R}$)”として定式化する根拠は，≪生活実践の中の量(カテゴリー)がこの定式化で以って十分捉えられる≫という認識である。そうでないと認識するならば，量(形式)を別様に定式化するまでである。

2.2 量(カテゴリー)，量(大きさ)

2.2.1 “量(カテゴリー)の色々”の意味

本節では，“量”は“量(カテゴリー)”のことである。

ある量は，他のいくつかの量のことばを組合せて記述できる。このような量は，“論理的”であると言うことができる。

論理的な量相互の違いは，(論理的)定義の違いである。論理的な量の色々は，(論理的)定義の色々である。

すべての量を論理的な量として記述することは，当然できない——それは循環論法になる。或る量が論理的な量としては記述されない量(“定義されない量”)として，残ることになる。このような量に対して，“基本的”という形容を用いることにしよう。

或る量が基本的か否かは，ひとの定めるところである。ひとは，任意に或る量を基本的であるとすることができる。但し，現実には，≪扱い易さ≫ということから，ケース・バイ・ケースで或る一定の決め方に落ち着く。例えば，日常生活での“長さ”，“重さ”，“時間”の扱い方は，基本的な量としてであり，“かさ(容積)”，“面積”，“体積”，“速さ”の扱い方は，論理的な量としてである。

基本的な量の場合，それら相互の違いは何か。それは，結局のところ，はかりの違いである。基本的な量は，はかりの上の事態として，操作的に定義される。基本的な量の色々は，操作的定義の色々である。

2.2.2 “はかり”

われわれは“はかりで量を測る”という言い回しをするが，これを文字通りに受け取れば，量がはかり以前にあることになる。しかし，量をはかり以前のものとして想定するのは，形而上学(イデア論)である。

量は，はかりの上の現象に読まれたところのものである。

はかりとは，先ず，はかりにかけられるモノ(事態)に対して，(量が読まれるところの)現象を現わす装置のことである。

はかりはこのような装置であることの上で，“一つの量(大きさ)”として読まれることになる差異化(註1)可能な現象を各モノに対して一意的につくり出し，差異化される個々の現象に名を与え，そしてこのことによって個々の現象を特定させる装置のこととなる。

はかりの上の現象の身分は，モノの記号である。そして記号は，それ自体で——即ち，モノから独立して——ひとにとっての存在になる。そして，このときひとがする(してしまう)ことは，≪記号≫に対する，≪モノの記号≫から≪量(大きさ)そのものの記号≫への読み換えである。

モノとそれの記号——それをはかりにかけたときにはかりが現わす現象——の対応は，論理的に，多対一である。したがって，モノとそれの量(大きさ)の対応は，多対1である。

さて，前節の最後に，基本的量(カテゴリー)の色々ははかりによる操作的定義の色々であると述べたが，いまこのことを，“長さ”と“時刻／時間”の二つを取り上げて確かめてみる。

長さの場合，はかりの機能は，先ず，“線分”が読まれるところの現象を現わすことである。(実際，“ものさしをあてる”ことの第一の意義は，“線分”という対象を現出させることである。) 測度は，線分の測度として為される。

時刻／時間の場合，はかりは“時計”である。“時計”は時刻／時間を計るものである以前に時間を現わすものである(註2)。この場合“時計”とは，先ず，(循環論法の言い方になるが)時間の経過にしたがって＜相(貌)＞を変ずる何かである。それは，天体の運行でも“腹時計”でもよい。ともかく，時間の経過に伴う＜相＞の変化をわれわれに現前させるということが，この場合に本質的な点である。そして測度は，この＜相＞の変化の測度として為される。

(註1) 量(大きさ)が量(大きさ)としてあり得るのは，他の量(大きさ)と異なるという形で対立する限りにおいてである。実際，量(大きさ)としてわれわれにとって存在するものがただ一つ(例えば1mの長さが唯一)である場合，それは量(大きさ)で

ある必要はない。

（註2）　われわれは，“時計”以前に時間が存在するというように考えたくなる。即ち，“いかなる種類の<相>の変化も認められない<真空>の中にも時間は在るのではないのか？”という具合に。しかし実際は，この想念においてはわれわれ自身が“時計”として機能しているのである。

2.2.3　量(カテゴリー)の集合論的(形而上学的)規定

存在の集合とその上の同値関係を仮構して量(カテゴリー)を構成する方法が考えられる。

例えば，長さでは，存在の集合として線分の集合を，その上の同値関係として“合同”の同値関係を，それぞれとる。各長さ(大きさ)は，一つの同値類として定式化される。

時間の場合には，例えばアナログ時計において，針の回転という現象の集合と，“回転角相等”の同値関係をとる。各時間(大きさ)は，一つの同値類として定式化される。

2.2.4　量(大きさ)の表現――表現目的と表現形態

本節では，“量”は“量(大きさ)”のことである。

量の表現には目的があり，そしてその目的に適した表現形態が選ばれる。目的は色々であり，したがって表現形態も色々である。

例えば，他者に或る量を知らせることを目的とした量表現がある。このときには，知らせようとする量を，既知の／身近な量に引き寄せて捉え易い／身近なものにするということが，表現を作る際の基本的な考え方になる。

量を既知の／身近な量に引き寄せる仕方は，色々ある。既知の／身近な量への置き換え(例：“その部屋の広さは，この部屋の広さくらい”)も一つであり，≪既知の／身近な量いくつ分≫のように表わす(例：“その部屋の広さは，この部屋の広さの3倍くらい”；“その部屋の広さは，16畳”)のも一つである。そして場合によっては，既知の／身近な量に対する比較のことば――“……より小さい”，“……よりずっと大きい”のような――だけで足りることもある。さらに，基準として用いている既知の／身近な量を明示しなくとも足りるような場合もある。即ち，“大きい”，“小さい”のようなことばだけで済ませられるような。

量計算を目的とした量表現では，量の捉え易さということは中心的な問題ではなくなる。このときには，計算のし易い数値を出すような量表現が，工夫されることになる。

量表現には，また，量そのものを捉えようとして為されるものもある。例えば，測定は，量を計器の上に表現する行為のことである。物の重さを知ろうとしてそれを持ち上げてみるというのも，この場合の量表現である。実際，この行為の意味は，重さを自分の感覚に表現するということである。

はじめに述べた≪(自分が捉えている)量を他者に知らせるための量表現≫は，基本的に，同種の量を用いての言い換え――ことばの操作――である。それに対し，いまの≪量を(自分が)捉えるための量表現≫では，量を何かに現象させることが，<表現>なのである。われわれはその現象を捉えて，量を捉えたとする。

因に，このときの“捉える”には，“見てわかる”のような気分の持たれるものもある。このときひとは，“量の視覚化”といった言い方をしたくなる。

3　量構成の論理

3.1　量(形式)の構成的記述

本章の主題は，量(形式)を構成的に――即ち，構築されたものとして――示すことである。

ところで量(形式)は，量が関わる実践に対してわれわれが読む一つの論理である。この論理は，実践に備わっているのではない。それは，実践に対して読めるのである。したがって，この論理の構成をひとの行為として――歴史のように――語るとすれば，それは全くナンセンスである。

ここで述べようとする“量(形式)の構成”は，

＜ひとの行為＞ではない。それは，論理の過程である。量(形式)の論理的構成的な記述の一つの形態を示すことが，ここでの目的である。

われわれは，量(形式)の構成を，“てんびん”の論理から始める。但しこうは言っても，“てんびん”は初めから論理としてしか登場しない。それは，モノ(事態)の概念から量(大きさ)の概念を導出するための概念装置である。本質的なのは，モノの“釣り合い／不釣り合い”——“量(大きさ)の相等／非相等”と読まれるところの——の概念である。

このように，ここでの“てんびん”は，皿に物をのせて重さの相等／非相等を見るあのてんびんのことではない。しかし本章では，イメージ喚起のし易さのために，各セクションの表題以外では，“量(大きさ)”のことばを“重さ(大きさ)”に換えることにする。ここでの“重さ(大きさ)”は，“量(大きさ)”のことばの代わりに過ぎない。

3.2　量(大きさ)の対象化

3.2.1　“てんびん”の論理

重さは，一つに，“てんびん”の上に生起する事態に対して読まれる。そこに存るのは，二つのモノをてんびんの両皿にのせたときにてんびんが傾いたり，平衡であったりという現象である。“重さ”という対象は，この現象に対する読みとして起こる。(“重さがてんびんの上に現象する”というのではない。)

“てんびん”に関しては，以下に述べるような論理がわれわれの実践において示される(われわれがそれを意識しているということではない)。

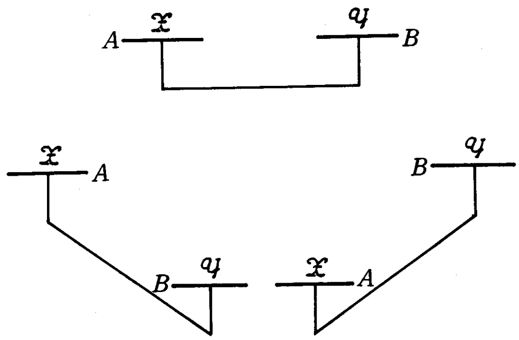
先ず，≪モノ(事態)の同一視≫の一形式がそこには示されている。この形式を“明確に”述べることはできないが，それは，モノの変形をモノの変化ということにはしないとか，モノは時間の経過の中では変化しないとする，といったようなことである。

但しその場合でも，モノに対する“同じ／異なる”の判断は都合的なものであるとする他ない。実際，物の或る変形に対し変形の前と後とをモノとして区別しておきたいという都合もあるのである。

本節では，モノが異なるということを，表示の文字が異なるということで，表わすことにする。

固定されたモノに対しては，以下のようなものが，“てんびんに関する実践”において示されるところの論理ということになる。

先ず，てんびんの二つの皿A，Bとモノ$\mathfrak{x}$，$\mathfrak{y}$に対し，つぎの三つの状態のうちの一つ，しかもただ一つのみが現出するということ：



この三つの状態をそれぞれ，$\mathfrak{x}\sim\mathfrak{y}$，$\mathfrak{x}<\mathfrak{y}$，$\mathfrak{x}>\mathfrak{y}$ と書くことにする。そこで，

　任意の$\mathfrak{x}$，$\mathfrak{y}$ に対し，$\mathfrak{x}\sim\mathfrak{y}$，$\mathfrak{x}<\mathfrak{y}$，$\mathfrak{x}>\mathfrak{y}$ のうちの一つ，しかもただ一つだけが，成り立つ.

となる。

さらに，

$$\mathfrak{x}\sim\mathfrak{y} \Longrightarrow \mathfrak{y}\sim\mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{x}<\mathfrak{y} \Longrightarrow \mathfrak{y}>\mathfrak{x}.$$

ということ。即ち，皿A，Bの区別は本質的ではない。そこで，$\mathfrak{y}\sim\mathfrak{x}$，$\mathfrak{y}>\mathfrak{x}$ を，それぞれ$\mathfrak{x}\sim\mathfrak{y}$，$\mathfrak{x}<\mathfrak{y}$ の別表現とし扱うことができることになる。

上のように定義された～の場合，その両辺に同じ対象記号(モノを表わす文字)が現われることはない。(一意存在は，はかりの二つの皿に同時にのることはできない！)

～，＜に関してわれわれは，

$$\mathfrak{x}\sim\mathfrak{y} \text{ かつ } \mathfrak{y}\sim\mathfrak{z} \Longrightarrow \mathfrak{x}\sim\mathfrak{z}.$$

$$\mathfrak{X}<\mathfrak{Y} \text{ かつ } \mathfrak{Y}<\mathfrak{Z} \Longrightarrow \mathfrak{X}<\mathfrak{Z}.$$

を法則(推移法則)として措く。

上のことから特に,

$$\mathfrak{X}<\mathfrak{Y} \text{ かつ } \mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Y}' \Longrightarrow \mathfrak{X}<\mathfrak{Y}',$$
$$\mathfrak{X}>\mathfrak{Y} \text{ かつ } \mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Y}' \Longrightarrow \mathfrak{X}>\mathfrak{Y}'.$$

が成立つ。

ここでさらに,“+”の概念が入ってくる。

二つのモノ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ をまとめて一つのモノと見る場合に,このモノを $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}$ と書くことにする。

$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}$ と $\mathfrak{Y}+\mathfrak{X}$ は同じモノであるとする。

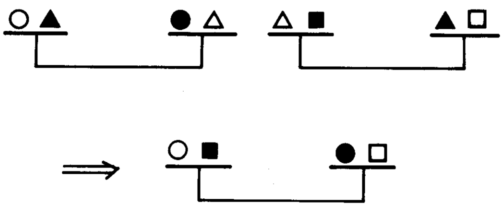
$(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})+\mathfrak{Z}$ と $\mathfrak{X}+(\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z})$ は同じモノであるとする。したがって,$(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})+\mathfrak{Z}$ と $\mathfrak{X}+(\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z})$ の区別は本質的ではない。そこでこれらに対して $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}$ の表現を用いていくことにする。またこれから,

$$\mathfrak{X}_1+\cdots\cdots+\mathfrak{X}_n$$

の表現が帰納的に定義できることになる。

さらに,

$$\mathfrak{X}\sim\mathfrak{X}' \Longrightarrow (\mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Y}' \Longleftrightarrow \mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}')$$
$$\mathfrak{X}<\mathfrak{X}' \Longrightarrow (\mathfrak{Y}>\mathfrak{Y}' \text{ あるいは } \mathfrak{X}+\mathfrak{Y}<\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}')$$
$$\mathfrak{X}\sim\mathfrak{X}' \Longrightarrow (\mathfrak{Y}<\mathfrak{Y}' \Longleftrightarrow \mathfrak{X}+\mathfrak{Y}<\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}')$$
$$(\mathfrak{X}\sim\mathfrak{X}' \text{ かつ } \mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Z}) \Longrightarrow \mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Z}$$
$$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y} \text{ かつ } \mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}'\sim\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Z}$$
$$\Longrightarrow \mathfrak{X}+\mathfrak{Z}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Z}$$



であるとする。

最初の二つの条件から特に,

$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}'$ のとき,

$$\mathfrak{X}\sim\mathfrak{X}' \Longrightarrow \mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Y}'$$
$$\mathfrak{X}<\mathfrak{X}' \Longrightarrow \mathfrak{Y}>\mathfrak{Y}'$$

が成り立つ。

3.2.2　モノの量(大きさ)

モノ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ に対する関係 $\mathfrak{X}\sim\mathfrak{Y}$(“$\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{Y}$ がてんびんでつりあう”)に対し,$\mathfrak{X}$ の<何か>と $\mathfrak{Y}$ の<何か>が同じという形の発想をし,関係 $\mathfrak{X}<\mathfrak{Y}$(“$\mathfrak{X}$ をのせた皿よりも $\mathfrak{Y}$ をのせた皿の方が下がる”)に対し $\mathfrak{X}$ の<何か>よりも $\mathfrak{Y}$ の<何か>の方が大きいという形の発想をするとき,重さ(大きさ)が対象として起こることになる。

重さがこのような形で対象化されることによって,モノは“重さをもつもの”になる。いま,モノ $\mathfrak{X}$ の重さを $W(\mathfrak{X})$ と表わすことにしよう(註)。対応:$\mathfrak{X} \longmapsto W(\mathfrak{X})$ は,論理上,多対一である。

(註)　集合論の発想では,“重さ(大きさ)”は,つぎのように対象化される。即ち,はかりの皿にのせられるモノ全体の集合 $\mathfrak{S}$ を仮構し,<はかりの上でつりあう>という関係 $\sim$ で $\mathfrak{S}$ を類別したときの各類を,一つの重さ(大きさ)と定義するのである。そして“モノ $\mathfrak{X}$ が属する類を $W(\mathfrak{X})$ と表わす”という言い方になる。

このときには,“差”のイデア的な読み方を免れることができる。しかしそうするために,ここでは,集合 $\mathfrak{S}$ を想定しこれを類別するというフィクション(形而上学)が,替わりにつくられているのである。

3.2.3　量(大きさ)の構造

3.2.3.1　順序構造

重さを対象化する発想は,関係 $\mathfrak{X}\sim\mathfrak{Y}$ を<重さ=対象>の相等:$W(\mathfrak{X})=W(\mathfrak{Y})$ に,関係 $\mathfrak{X}<\mathfrak{Y}$ を<重さ=対象>の関係:$W(\mathfrak{X})<W(\mathfrak{Y})$ に,それぞれ読み直すことであった。そこで,はかりの論理は,重さの論理へと直接読み直されることになる。そしてこのときの=,<の論理は,重さに全順序構造を与えるものになっている。

重さについては,任意の $W(\mathfrak{X})$ に対し $O<W(\mathfrak{X})$ である最小の重さ O(オー)を想定する。

3.2.3.2　位相構造

先ず,重さ X, Y に対し,区間] X, Y [という実体概念を起こす。即ちそれは,$X<Z$ かつ

Z<Y となる Z が属する<何か>という形で対象化される。Z が] X, Y [に属することを, Z∈] X, Y [と書いて表わす。

] X, Y [の実体概念のこのような導入は，形而上学ではない(註)。実際，記号], [, ∈は，“X<Zかつ Z<Y”の言い換え——“Z∈] X, Y [”の形による——に用いられるのみである。この記号法は，あくまでも，記述のし易さのために導入される。新しい対象を起こすことが目的なのではない。

区間] ←, X [,] X, → [の概念を，“Z∈] ←, X [”, “Z∈] X, → [”がそれぞれ“Z<X”, “X<Z”の言い換えになるようなものとして，起こす。

区間としては，[X, Y [,] X, Y], [X, Y],] ←, X], [X, → [のようなものも定義できる。そこで,] X, Y [,] ←, X [,] X, → [の形の区間を開区間と呼んで，これらと区別する。

この上でさらに，重さ X に対する実体概念 $\mathfrak{U}_0$(X)を，“V∈ $\mathfrak{U}_0$(X)”が“V は X が属する開区間”の言い換えになるようなものとして，起こす。

このとき，明らかに次のことが成り立つ：

1）$V\in\mathfrak{U}_0(X)\Longrightarrow X\in V$.

2）V_1, $V_2\in\mathfrak{U}_0(X)$に対し，$V\subset V_1$, $V\subset V_2$ であるような $V\in\mathfrak{U}_0(X)$が存在する．

3）$V\in\mathfrak{U}_0(X)$は，つぎの条件を満たす或る $W\in\mathfrak{U}_0(X)$を含む：≺$Y\in W\Longrightarrow$($V_Y\in\mathfrak{U}_0(Y)$かつ $V_Y\subset V$となる V_Y が存在する)≻.

但しここで，“⊂”は，“$S\subset T$”を“$X\in S\Longrightarrow X\in T$”と読ませるところの記号である。

上の1), 2), 3)は，数学の文脈では，$\mathfrak{U}_0(X)$がXの基本開近傍系となるような位相$\mathfrak{O}$を一意的に決めるところの条件である。そして，このように開区間で基本近傍系をつくったときの$\mathfrak{O}$は，順序位相と呼ばれる。

(註) これに対し，“$X<Z$かつ$Z<Y$である重さZの全体”として対象] X, Y [を導入するのは，形而上学である。

3.3 量(大きさ)の差

3.3.1 “差”の概念と，それの実体概念化

重さ(大きさ)に対し，“差”が以下のように定義できる。

先ず，重さの対(X, Y), (X', Y')の間の関係$(X, Y)\sim(X', Y')$を，つぎのいずれかが満たされることとして，定義する：

1) $X=X'$ かつ $Y=Y'$

2) $X=Y$ かつ $X'=Y'$

3) X, Y, X', Y' は互いに異なる；かつ，

3-1) それぞれがモノ$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$に対する $W(\mathfrak{X})$, $W(\mathfrak{Y})$, $W(\mathfrak{X}')$, $W(\mathfrak{Y}')$のとき，

$$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}$$

が成り立ち，

3-2) Xが最小の重さO(オー)で，Y, X', Y'が上と同じときは，$\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}$ が成り立つ．

但し，条件3)がX, Y, X', Y'に対する$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$のとりかたに依らないというようにするため，はかりの論理として，

$$(\mathfrak{X}+\mathfrak{D}\sim\mathfrak{Y} \text{ かつ } \mathfrak{D}\sim\mathfrak{D}') \Longrightarrow \mathfrak{X}+\mathfrak{D}'\sim\mathfrak{Y}$$

を措くことが必要である(註1)。

～は，≺反射法則，対称法則，推移法則を満たす関係≻という意味での同値関係になっている。

いま，関係$(X, Y)\sim(X', Y')$を，同一の或る<何か>が対(X, Y), (X', Y')の両方に示されているというように読んでみる。このとき，実体概念の“差”が出てくる(註2)。

対(X, Y)に示される差を，“YのXとの差”と言い表し，$\overrightarrow{XY}$と書くことにする。$(X, Y)\sim(X', Y')$の関係はこのとき，“YのXとの差はY'のX'との差に等しい”と読まれ，$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$と書かれるものになる。

強調しておくが，実体概念としての“差”は，読み方に過ぎない。“YのXとの差”の言い回しと記号$\overrightarrow{XY}$を導入したが，このことばや記号の指す実体が何かあるわけではない。

但し，$X=W(\mathfrak{X})$, $Y=W(\mathfrak{Y})$ に対する$\overrightarrow{XY}$は，はかりの上で$\mathfrak{X}+\mathfrak{D}\sim\mathfrak{Y}$となるモノ$\mathfrak{D}$が見

出されるときには，重さ $D=W(\mathfrak{D})$ の形で実体概念化できる。そして，$X=W(\mathfrak{X})$，$Y=W(\mathfrak{Y})$，$X'=W(\mathfrak{X}')$，$Y'=W(\mathfrak{Y}')$ に対する関係 $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$ は，条件

($\mathfrak{X}+\mathfrak{D}\sim\mathfrak{Y}$ かつ $\mathfrak{X}'+\mathfrak{D}'\sim\mathfrak{Y}'$)

$\Longrightarrow$ ($\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}'$ は同じか，あるいは $\mathfrak{D}\sim\mathfrak{D}'$)

で特徴づけられることになる。

なお，差の定義より特に，

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XY}$$
$$\overrightarrow{XX}=\overrightarrow{YY}$$
$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}\Longrightarrow\overrightarrow{YX}=\overrightarrow{Y'X'}.$$

また，

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}\Longrightarrow\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$$

である(註3)。

(註1)　実際，このとき $X=W(\mathfrak{X})=W(\mathfrak{X}_1)$，$X'=W(\mathfrak{X}')=W(\mathfrak{X}'_1)$，$Y=W(\mathfrak{Y})=W(\mathfrak{Y}_1)$，$Y'=W(\mathfrak{Y}')=W(\mathfrak{Y}'_1)$，$\mathfrak{X}_1+\mathfrak{Y}'_1\sim\mathfrak{X}'_1+\mathfrak{Y}_1$ であるとしよう。$\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}_1$ は同一かあるいは $\mathfrak{X}\sim\mathfrak{X}_1$ であり，かつ $\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{X}'_1$，$\mathfrak{Y}_1$，$\mathfrak{Y}'_1$ のどれとも異なるから，$\mathfrak{X}_1+\mathfrak{Y}'_1\sim\mathfrak{X}'_1+\mathfrak{Y}_1$ より $\mathfrak{X}\sim\mathfrak{Y}'_1\sim\mathfrak{X}'_1+\mathfrak{Y}_1$ を得る。同様にして，$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'_1\sim\mathfrak{X}'_1+\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'_1\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}$ をつぎつぎと得る。

(註2)　集合論の発想では，“差”は，同値関係～に関する同値類として実体化される。そして“$(X,\ Y)$を代表元とする同値類を$\overrightarrow{XY}$と表わす”という言い方になる。このときには，“差”のイデア的な読み方を免れることができる。しかしそうするために，同値関係による集合の類別というフィクションが，替わりに仮構されている。

(註3)　実際，$\overrightarrow{W(\mathfrak{X})W(\mathfrak{Y})}=\overrightarrow{W(\mathfrak{X}')W(\mathfrak{Y}')}$ は $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}\sim\mathfrak{Y}+\mathfrak{X}'$ を意味し，そして $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{Y}+\mathfrak{X}'$ は $\overrightarrow{W(\mathfrak{X})W(\mathfrak{X}')}=\overrightarrow{W(\mathfrak{Y})W(\mathfrak{Y}')}$ で表現される。

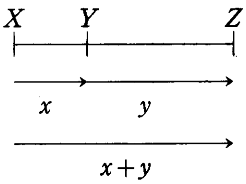
3.3.2　“差”の構造

3.3.2.1　代数的構造

差の加法$x+y$を，

$x=\overrightarrow{XY}$，$y=\overrightarrow{YZ}$ のとき，

$$x+y=y+x=\overrightarrow{XZ}$$



で定義することができる。(実際，

1) $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$ かつ $\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{Y'Z'}$

$\Longrightarrow\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{X'Z'}$；

2) $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{VW}$ かつ $\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{UV}$

$\Longrightarrow\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{UW}$

が成り立つ(註1)ので，この定義は“well-defined”である。)

注意：$x+y$は，$x=\overrightarrow{XY}$，$y=\overrightarrow{YZ}$ となるX，Y，Zがとれる場合に限り定義される。

＋は定義より可換であり，また明らかに結合法則――$(x+y)+z$，$x+(y+z)$の一方が定義されるとき他方も定義されて，かつ $(x+y)+z=x+(y+z)$――を満たす。

さらに，$\overrightarrow{XX}$が＋に関して零元となり，$\overrightarrow{XY}$に対して$\overrightarrow{YX}$がこれの対称元(＋に関する逆元)になる。零元を０と書き，差xの対称元を$-x$で表わす。また，x，yに対し，$x+z=y$ となるzが存在するとき，このz を $y-x$ で表わす。

$(x+y)+z\,(=x+(y+z))$ を，$x+y+z$ と書く。さらに，帰納的に，$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$ を定義する。

$x_i=x$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ で $x_1+\cdots\cdots+x_n$ が定義されるとき，これをxのn回の累加を呼び，$x_\times n$と書く。また，$x_\times 0=0$ と定義する(左辺と右辺の０は，それぞれ整数０と差０)。

さらに，負の整数mに対し，

$$x_\times m=(-x)_\times(-m)$$

と定義する。このとき，任意の整数mに対し，

$$x_\times(-m)=(-x)_\times m=-(x_\times m)$$

である(註2)。

(註1)　1)：X，Y，Z，X'，Y'，Z'が互いに異なる場合だけを考える(他の場合は自明である)。このとき，$X=W(\mathfrak{X})$，$Y=W(\mathfrak{Y})$，$Z=W(\mathfrak{Z})$，$X'=W(\mathfrak{X}')$，$Y'=W(\mathfrak{Y}')$，$Z'=W(\mathfrak{Z}')$ とすると，$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$，$\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{Y'Z'}$ は，$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+$

$\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}'\sim\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Z}$ の意味で，はかりの論理(§3.1)よりこのとき $\mathfrak{X}+\mathfrak{Z}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Z}$，即ち $\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{X'Z'}$。

2)：1)と同じ型で証明される。

（註2） $m\geqq 0$ のとき，$x_{\times}(-m)=(-x)_{\times}m$。さらに $(-x)_{\times}m+x_{\times}m$ が定義できて，これは0。$m<0$ のとき $(-x)_{\times}m=x_{\times}(-m)$，$-(x_{\times}m)=-((-x)_{\times}(-m))$。さらに $x_{\times}(-m)+(-x)_{\times}(-m)$ が定義できて，これは0。

3.3.2.2　順　序　構　造

差に関しては，さらに，その間の順序関係≦を定義することができる。

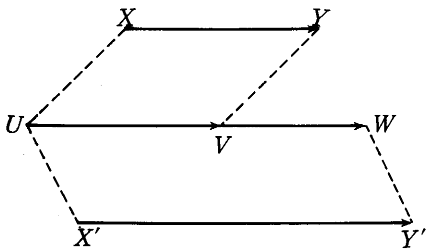
先ず，

$(\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$ かつ $X<Y) \Longrightarrow X'<Y'$

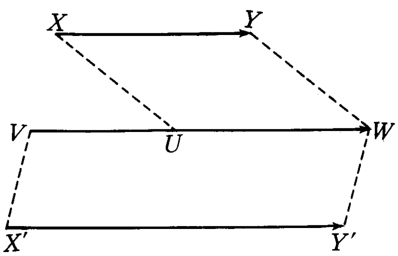
である[註1]ので，$\overrightarrow{XY}$ は $X\leqq Y$ のとき正，$X\geqq Y$ のとき負であると定義する。

正の差 $\overrightarrow{XY}$，$\overrightarrow{X'Y'}$ の間の関係 $\overrightarrow{XY}\leqq\overrightarrow{X'Y'}$ を，つぎの条件のいずれかが満たされることとして定義する[註2]：

1）$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UV}$，$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{UW}$，$V\leqq W$ となる U，V，W が存在する；



2）$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UW}$，$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{VW}$，$U\geqq V$ となる U，V，W が存在する。



注意：正の差 $\overrightarrow{XY}$ と $\overrightarrow{X'Y'}$ は，上の条件を満たす U，V，W がとれる場合に限り比較可能である。

二つの負の差 x，y は，正の差 $-x$，$-y$ が $-x\geqq -y$ の関係にあるときに，$x\leqq y$ であると定める。

正の差の間の関係としての≦と負の差の間の関係としての≦は，ともに推移法則を満たしている。しかも

$$x \text{ は正} \Longleftrightarrow x\geqq 0$$
$$x \text{ は負} \Longleftrightarrow x\leqq 0$$

である。したがって，二つの≦は，(正負の如何を問わない)差の間の関係≦として一本化できる。そしてこの≦は，順序関係になる。

なお，差 x，y，d に対し，

$$x+d=y \Longrightarrow (x\leqq y \Longleftrightarrow d\geqq 0)$$

である[註3]。

（註1） 問題になるのは，X，Y，X'，Y' が互いに異なる場合であるが，このとき $X=W(\mathfrak{X})$，$Y=W(\mathfrak{Y})$，$X'=W(\mathfrak{X}')$，$Y'=W(\mathfrak{Y}')$ とすると，＜$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$ かつ $X<Y$＞の意味は，$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}'\sim\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}$ かつ $\mathfrak{X}<\mathfrak{Y}$。そしてはかりの論理として，このときには $\mathfrak{X}'<\mathfrak{Y}'$ でなければならない（前節）。よって $X'<Y'$。

（註2） この定義は“well-defined”である。即ち，関係 $\overrightarrow{XY}\leqq\overrightarrow{X'Y'}$ は，$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UV}$，$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{UW}$ あるいは $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UW}$，$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{VW}$ となる U，V，W のとり方に依らない。

実際，$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{U_1V_1}$，$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{UW}=\overrightarrow{U_1W_1}$，$V\leqq W$ のとき，$U=W(\mathfrak{U})$，$V=W(\mathfrak{V})$，$W=W(\mathfrak{W})$，$U_1=W(\mathfrak{U}_1)$，$V_1=W(\mathfrak{V}_1)$，$W_1=W(\mathfrak{W}_1)$ とすると，$\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{U_1V_1}$，$\overrightarrow{UW}=\overrightarrow{U_1W_1}$ より，$\mathfrak{U}+\mathfrak{V}_1\sim\mathfrak{U}_1+\mathfrak{V}$，$\mathfrak{U}+\mathfrak{W}_1\sim\mathfrak{U}_1+\mathfrak{W}$，さらにこれより $\mathfrak{V}+\mathfrak{W}_1\sim\mathfrak{V}_1+\mathfrak{W}$ (§3.1)。また，$\mathfrak{V}\leqq\mathfrak{W}$ より $\mathfrak{V}\leqq\mathfrak{W}$ で，これと関係 $\mathfrak{V}+\mathfrak{W}_1\sim\mathfrak{V}_1+\mathfrak{W}$ より $\mathfrak{V}_1\leqq\mathfrak{W}_1$，よって $V_1\leqq W_1$。

同様に，$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{UW}=\overrightarrow{U_1W_1}$，$\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{VW}=\overrightarrow{V_1W_1}$，$U\geqq V$ のときには，$U_1\geqq V_1$ となる。

（註3） $x=\overrightarrow{UV}$，$d=\overrightarrow{VW}$ とすると，$y=\overrightarrow{UW}$。そしてこのとき $x\leqq y$ は $V\leqq W$ を意味し，$V\leqq W$ はまた $d\geqq 0$ を意味する。

3.3.2.3　位　相　構　造

差に関しての開区間]x，y[と，そして条件：

1）$V\in\mathfrak{U}_0(x) \Longrightarrow x\in V$.

2）V_1, $V_2 \in \mathfrak{U}_0(x)$ に対し，$V \subset V_1$, $V \subset V_2$ であるような $V \in \mathfrak{U}_0(x)$ が存在する．

3）$V \in \mathfrak{U}_0(x)$ は，つぎの条件を満たす或る $W \in \mathfrak{U}_0(x)$ を含む：≪$y \in W \Longrightarrow$ （$V_y \in \mathfrak{U}_0(y)$ かつ $V_y \subset V$ となる V_y が存在する）≫.

を満たす $\mathfrak{U}_0(x)$ を，§3.2.2.2と同様の手続きで，対象として起こす。このことは，数学の文脈では，順序位相と呼ばれる構造の導入の意味になる。

差 x と正の差 $r>0$ に対し，実体概念 $U(x, r)$ を，“$y \in U(x, r)$”が“y は差で，かつ $x<y+r$, $y<x+r$”の言い換えになるようなものとして，起こす。$U(x, r)$ を x の r-近傍と呼ぶ。

x の r-近傍は $\mathfrak{U}_0(x)$ に属し，また，任意の $V \in \mathfrak{U}_0(x)$ は，或る $r>0$ に対する x の r-近傍を含む。

このことは，数学の文脈では，$\mathfrak{U}_0(x)$ が定める位相に関し x の r-近傍が x の基本近傍系を成すという意味のことになる。

$x+y$ の r-近傍に対しては，x の r_1-近傍と y の r_2-近傍で，条件：

x' が x の r_1-近傍に属し，y' が y の r_2-近傍に属するとき，$x'+y'$ は $x+y$ の r-近傍に属する．

を満たすものがとれる。このことは，≪加法＋：$(x, y) \longmapsto x+y$ は連続≫の意味になる。

3.3.3 量(大きさ)に対する，差の作用

3.3.3.1 差 の 作 用

重さ X に対する差 x の作用を，

$x=\overrightarrow{XY}$ のとき，$X_+x=Y$

で定義する。

注意：X_+x は，$x=\overrightarrow{XY}$ となる Y がとれる場合に限り定義される。

このとき，

重さ X，差 x，y に対し $(X_+x)_+y$ が定義されるとき，$X_+(x+y)$ も定義されて，かつ

$$(X_+x)_+y=X_+(x+y).$$

また，

$$X_+x=Y \iff x=\overrightarrow{XY}$$

$$X_+0=X。$$

3.3.3.2 作用の連続性

作用$_+$が，$\overrightarrow{XO} \leqq x$ （Oは，最小の重さ（§3.2.3.1））であるような重さ X と差 x に対してつねに定義されるとする。そしてこのとき，重さ X と正の差 $r>0$ に対し，実体概念 $U(X, r)$ を，“$Y \in U(X, r)$”が“Y は重さで，かつ $X<Y_+r$, $Y<X_+r$”の言い換えになるようなものとして，起こす。$U(X, r)$ を X の r-近傍と呼ぶ。

X の r-近傍は $\mathfrak{U}_0(X)$ (§3.2.2.2) に属し，また，任意の $V \in \mathfrak{U}_0(X)$ は，或る差 $r>0$ に対する X の r-近傍を含む[註1]。

このことは，数学の文脈では，$\mathfrak{U}_0(X)$ が定める位相に関し X の r-近傍が X の基本近傍系を成すという意味のことになる。

いま，さらに，最小の正の差＞0は存在しないものとする。このとき，X_+x の r-近傍に対しては，差 $r'>0$ で，条件：

X' が X の r'-近傍に属し，x' が x の r'-近傍に属するとき，X'_+x' は X_+x の r-近傍に属する．

を満たすものがとれる[註2]。このことは，≪作用$_+$：$(X, x) \longmapsto X_+x$ は連続≫の意味になる。

（註1） $X=O_+x$ に対し

$$U(X, r)=\begin{cases}]X+(-r),\ X_+r[& (r\leqq x) \\ ]\leftarrow,\ X_+r[& (r>x)\end{cases}$$

である。よって，$U(X, r)$ は開区間。また，$V \in \mathfrak{U}_0(X)$ が開区間] L, R [のときは，r として $\overrightarrow{LX}$, $\overrightarrow{XR}$ の小さい方をとる。] ←, R [のときは，$\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{XR}$ の小さい方をとる。] L, → [のときは，$\overrightarrow{LX}$ をとる。

（註2） X_+x の r-近傍は，

$]X_+(x-e),\ X_+(x+e)[,\ e>0$

の形の開区間を含む。いま $r'_{\times}2 \leqq e$ となる $r'>0$ をとると，これは条件を満たす。

3.4 差　の　比

3.4.1 “比”の概念と，それの実体概念化

差に対し，それの“比”が以下のように定義できる。

先ず，x，$x'\neq 0$ である差の対 (x, y)，(x', y') の間の関係 $(x, y)\sim(x', y')$ を，つぎの条件が満たされることとして定義する：

差 u，u' と整数 m，n で，

$$x=u_\times m,\ y=u_\times n$$
$$x'=u'_\times m,\ y'=u'_\times n$$

となるものがとれる(註1)．

この条件は，“m，n は互いに素”としても同じである。

～は，対称法則は満たすが，反射法則は満たさない。実際われわれは，任意の差 x，y に対し $x=u_\times m$，$y=u_\times n$ となる差 u と整数 m，n がとれるということは，仮定しない。

しかしわれわれは，～を，推移法則を満たす関係ということにする。そのために，(互いに同値な(註2))条件：

1) $u_\times m=v_\times p$ かつ $u_\times n=v_\times q$
$\Longrightarrow m_\times q=n_\times p$(註3)；

2) 差 $x\neq 0$，y に対する，互いに素な整数 m，n による表現 $x=u_\times m$，$y=u_\times n$ は一意．

を，差の論理として措く。実際このとき，～は推移法則を満たすようになる。

いま，関係 $(x,y)\sim(x',y')$ を，同一の或る＜何か＞が対 (x, y)，(x', y') の両方に示されているというように読んでみる。このとき，実体概念の“比”が出てくる(註4)。

対 (x, y) に示される比を，“x に対する y の比”と言い表わし，$x:y$ と書くことにする。$(x, y)\sim(x', y')$ の関係はこのとき，“x に対する y の比は x' に対する y' の比に等しい”と読まれ，$x:y=x':y'$ と書かれるものになる。

強調しておくが，実体概念としての“比”は，読み方に過ぎない。“x に対する y の比”の言い回しと記号 $x:y$ を導入したが，このことばや記号の指す実体が何かあるわけではない。

比の定義より特に，

x，y，x'，$y'\neq 0$ に対し，

$$x:x=y:y,$$
$$x:0=y:0,$$
$$x:y=x':y'\Longrightarrow y:x=y':x'.$$

(しかし，$x:y=x':y'$ には $x:x'=y:y'$ という含意はない。)

また，

$$x:(-y)=(-x):y,$$
$$\xi=x:y=x':y' \text{ かつ } x+x'\neq 0$$
$$\Longrightarrow \xi=(x+x'):(y+y'),$$
$$x:y=x':y' \text{ かつ } x,\ y \text{ は同符号}$$
$$\Longrightarrow x',\ y' \text{ は同符号}$$

が成り立つ(註5)。

$x=u_\times m\neq 0$，$y=u_\times n$ のとき，“x に対する y の比 $x:y$ は $m:n$”と言い表わすことにする。“$m:n$”($m\neq 0$)の形の表現を“整数比”と呼ぶことにすれば，≪$x:y$ と $x':y'$ は同じ整数比になる≫が，関係 $x:y=x':y'$ の規準になる。

差の比 $x:y$ が整数比 $m:n$ であるとき，$p:q$ が同じく $x:y$ の整数比であるためには，$\dfrac{n}{m}=\dfrac{q}{p}$ であることが必要十分である。そこで，整数比 $m:n$ の比 ξ に有理数(註6) $\dfrac{n}{m}$ を対応させる対応

$$r:\xi\longmapsto\frac{n}{m}$$

が定義でき，しかもこれは1対1になる。

(註1)　但し，＜存在の事実＞として“とれる”があるのではない。“とれる”とは，“とれた”と見なす実践が為されるということである。

(註2)　1)⇒2)：$x=u_\times m=v_\times p$，$y=u_\times n=v_\times q$ のとき，仮定から $m\times q=n\times p$。ここで m と n が互いに素で，p と q が互いに素ならば，$m=p$，$n=q$。

2)⇒1)：m と n の最大公約数を s とし，p と q の最大公約数を t として，$m=m_1\times s$，$n=n_1\times s$，$p=p_1\times t$，$q=q_1\times t$ とする。このとき，m_1 と n_1 は互いに素，p_1 と q_1 は互いに素，そして $(u_\times s)_\times m_1=(v_\times t)_\times p_1$，$(u_\times s)_\times n_1=(v_\times t)_\times q_1$。そこで仮定より，$m_1=p_1$，$n_1=q_1$。さらに，$m\times q=(m_1\times s)\times(q_1\times t)=(q_1\times s)\times(m_1\times t)=(n_1\times s)\times(p_1\times t)=n\times$

p。

（註3）　式変形“$u_{\times}(m\times q)=(u_{\times}m)_{\times}q=(v_{\times}p)_{\times}q=v_{\times}(p\times q)=(v_{\times}q)_{\times}p=(u_{\times}n)_{\times}p=u_{\times}(n\times p)$”をしてこれから $m\times q=n\times p$ を結論するというやり方は，使えない。$_{\times}$がいつも定義されるという保証が与えられていないからである。

（註4）　なお，集合論の方法では，“比”は，同値関係～に関する同値類として実体化される。そして“$(x,\ y)$を代表元とする同値類を $x:y$ と表わす”という言い方になる。このときには“比”のイデア的な読み方を免れることができるが，しかしそうするために，同値関係による集合の類別というフィクションが，替わりに仮構されている。

（註5）　以下，$x=u_{\times}m,\ y=u_{\times}n,\ x'=u'_{\times}m,\ y'=u'_{\times}n$ とする。

1）$-x=(-u)_{\times}m,\ \ y=(-u)_{\times}n$。

2）$x+x'=u_{\times}m+u'_{\times}m$ が定義されることから，$u+u'$ が定義され，さらに$(u+u')_{\times}m,\ (u+u')_{\times}n$が定義される。そしてこのとき，$x+x'=(u+u')_{\times}m,\ \ y+y'=(u+u')_{\times}n$。

3）xとyが同符号なら，mとnが同符号，したがってx'とy'は同符号。

（註6）　“有理数”は*“rational number”*の訳であるが，*“rational”*の本来の意味から言って，“比数”と訳すのがスジである。（対応して，“無理数”は，“非比数”となる。）

3.4.2　“比”の構造

3.4.2.1　代数的構造

本節では，比の加法と乗法を導入する。しかしこの演算の導入（さらに，次節における比の順序の導入）については，これまで一応即いてきたやり方——《与えられているモノに対しての，てんびんの上の実践》のレベルで定義していくというやり方——では，最早やっていけない。

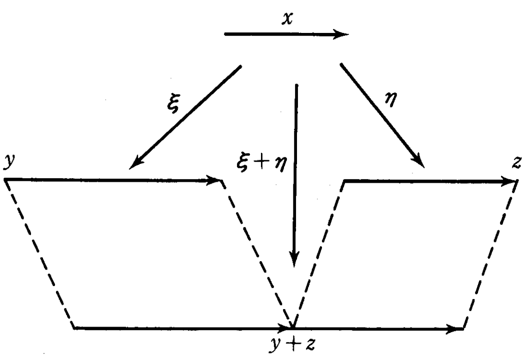
例えば，《任意の差xと整数　$n\neq 0$ に対し $x=u_{\times}n$ となる差uがとれる》ということを仮定しなければ，比の代数の話は作れない。しかし，この仮定を容れることは，《既に与えられているモノに対しての，てんびんの上の実践》から離れることを意味する。$u=\overrightarrow{W(\mathfrak{X})\,W(\mathfrak{Y})}$であるようなモノ$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$が与えられている保証は無いからである。

われわれは，この段階で，《実践》の内容をふくらませなければならない。即ち，《所期の条件を満たす差 $\overrightarrow{W(\mathfrak{X})\,W(\mathfrak{Y})}$ を，モノ$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$が無ければ新たにそれをつくることによって，現出させることができる》とすることによって。

このとき，比の加法 $\xi+\eta$ を，

$\xi=x:y,\ \ \eta=x:z$ のとき，

$$\xi+\eta=\eta+\xi=x:(y+z)$$



で定義することができる(註1)。

＋は定義より可換であり，また明らかに結合法則——$(\xi+\eta)+\zeta=\xi+(\eta+\zeta)$——を満たす。

$(\xi+\eta)+\zeta(=\xi+(\eta+\zeta))$ を，$\xi+\eta+\zeta$ と書く。さらに，帰納的に，$\xi_1+\xi_2+\cdots\cdots+\xi_n$ を定義する。

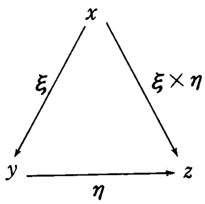
$\xi_i=\xi\ (i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ のときの $\xi_1+\cdots\cdots+\xi_n$ を，ξのn回の累加と呼ぶ。

比 $x:0$ が＋に関して零元となり，$x:y$ に対して $x:(-y)$ がこれの対称元（＋に関する逆元）になる。零元を0と書き，比ξの対称元を$-\xi$で表わす。

つぎに，比の乗法 $\xi\times\eta$ を，

1）$\xi=x:y,\ \ \eta=y:z$ のとき，

$$\xi\times\eta=\eta\times\xi=x:z$$



2）$0\times\xi=0$
で定義することができる(註2)。

×は，定義より可換であり，また結合法則——$(\xi\times\eta)\times\zeta=\xi\times(\eta\times\zeta)$——を満たす。

$(\xi\times\eta)\times\zeta(=\xi\times(\eta\times\zeta))$ を，$\xi\times\eta\times\zeta$ と書く。さらに，帰納的に，$\xi_1\times\xi_2\times\cdots\cdots\times\xi_n$ を定義する。

$\xi_i=\xi(i=1,\cdots\cdots,n)$ のときの $\xi_1\times\cdots\cdots\times\xi_n$ を，ξの n 回の累乗と呼び，ξ^nと書く。

$x:x$ が×に関して単位元となり，$x:y$ $(y\neq 0)$ に対して $y:x$ がこれの逆元になる。単位元を1と書き，比ξの逆元を ξ^{-1} で表わす。

整数は，差 $u\neq 0$ を固定したときの対応：$n\longmapsto u:(u_\times n)$ によって，差の比として捉え直すことができる。そしてこのとき，比ξの n 回の累加は $\xi\times n$ に等しい(註3)。

§3.4.1で導入した対応 r については，

$$r(\xi+\eta)=r(\xi)+r(\eta)$$
$$r(\xi\times\eta)=r(\xi)\times r(\eta)$$

が成り立つ(註4)。

＋と×の間には，分配法則が成立している(註5)：

$$(\xi+\eta)\times\zeta=\xi\times\zeta+\eta\times\zeta.$$

（註1） 先ず，(<<実践>>の内容の変更により) $y+z$, $z+y$ が定義され，このとき $y+z=z+y$。したがって，

$x:y=x':y'$ かつ $x:z=x':z'$

$\Longrightarrow$ $x:(y+z)=x':(y'+z')$

が確かめるべきことがらになる。いま，$x=u_\times m=v_\times p$, $y=u_\times n$, $z=v_\times q$, $x'=u'_\times m=v'_\times p$, $y'=u'_\times n$, $z'=v'_\times q$ として，$u=w_\times p$, $u'=w'_\times p$ となる差 w, w' をとる。このとき，$v=w_\times m$, $v'=w'_\times m$ となり，さらに $x=w_\times(m\times p)$, $y+z=w_\times(n\times p+m\times q)$, $x'=w'_\times(m\times p)$, $y'+z'=w'_\times(n\times p+m\times q)$。結局，$x:(y+z)=x':(y'+z')$。

（註2） 確認すべき点は，

1）$x:y=x':y'$ かつ $y:z=y':z'$

$\Longrightarrow$ $x:z=x':z'$;

2）$x:y=y':z'$ かつ $y:z=x':y'$

$\Longrightarrow$ $x:z=x':z'$

の二つである。そしてどちらも，（註1）の証明と同じ型で証明される。

（註3） $\xi=x:y$, $n=y:(y_\times n)$ とすると，$\xi\times n=x:(y_\times n)$で，$x:(y_\times n)$ はξの n 回の累加。

（註4） 1）$\xi=x:y$ と $\eta=x:z$ がそれぞれ整数比 $m:n$ と整数比 $m:p$ であるような整数m, n, pがとれて，このとき，$\xi+\eta=x:(y+z)$ は整数比 $m:(n+p)$。よって，$r(\xi+\eta)=\frac{n+p}{m}=\frac{n}{m}+\frac{p}{m}=r(\xi)+r(\eta)$。

2）$\xi=x:y$ と $\eta=y:z$ がそれぞれ整数比 $m:n$ と整数比 $n:p$ であるような整数m, n, p がとれて，このとき，$\xi\times\eta=x:z$ は整数比 $m:p$。よって，$r(\xi\times\eta)=\frac{p}{m}=\frac{n}{m}\times\frac{p}{n}=r(\xi)\times r(\eta)$。

（註5） $r((\xi+\eta)\times\zeta)=(r(\xi)+r(\eta))\times r(\zeta)=r(\xi\times\zeta)+r(\eta\times\zeta)=r(\xi\times\zeta+\eta\times\zeta)$。これより，$(\xi+\eta)\times\zeta=\xi\times\zeta+\eta\times\zeta$。

3.4.2.2 順 序 構 造

差の比に有理数を1対1に対応させる対応 r を，§3.4.1 で導入した。

ところで，有理数に対しては，既に順序関係(大小関係)が考えられている。即ち，$\frac{n}{m}\leqq\frac{q}{p}$ が，条件：

整数 $s>0$, t_1, t_2 に対し $\frac{n}{m}=\frac{t_1}{s}$, $\frac{q}{p}=\frac{t_2}{s}$ のとき，$t_1\leqq t_2$.

で定義される。

そこで，対応 r を逆に辿ることによって，有理数の順序関係で差の比の順序関係が定義できることになる。即ち，比の順序関係$\xi\leqq\eta$が，

$$\xi\leqq\eta \iff r(\xi)\leqq r(\eta)$$

で定義できる。

このとき，ξ, η, δ に対し，

$$\xi+\delta=\eta \Longrightarrow (\xi\leqq\eta \iff \delta\geqq 0)$$

である(註)。

（註） $\xi\leqq\eta$ は $r(\xi)\leqq r(\eta)$ を意味し，他方，$r(\eta)=r(\xi+\delta)=r(\xi)+r(\delta)$ より，$r(\xi)\leqq r(\eta)$ は $r(\delta)\geqq 0$, 即ち $\delta\geqq 0$ を意味する。

3.4.2.3 位　相　構　造

比に関しての開区間]ξ, η[と，そして条件：

1）$V\in\mathfrak{U}_0(\xi) \Longrightarrow \xi\in V$.

2）V_1, $V_2\in\mathfrak{U}_0(\xi)$ に対し,$V\subset V_1$, $V\subset V_2$ であるような $V\in\mathfrak{U}_0(\xi)$ が存在する.

3）$V\in\mathfrak{U}_0(\xi)$ は，つぎの条件を満たす或る $W\in\mathfrak{U}_0(\xi)$ を含む：≪$\eta\in W \Longrightarrow$ ($V_1\in\mathfrak{U}_0(\eta)$ かつ $V_1\subset V$ となる V_1 が存在する)≫.

を満たす $\mathfrak{U}_0(\xi)$を，§3.2.2.2 と同様の手続きで，対象として起こす。

比 ξ と正の比 $\rho>0$ に対し,“ξ の ρ- 近傍 $U(\xi, \rho)$” の概念を，§3.3.2.3 と同様にして導出する。ξ の ρ- 近傍は $\mathfrak{U}_0(\xi)$ に属し，また，任意の $V\subset\mathfrak{U}_0(\xi)$ は，或る $\rho>0$ に対する ξ の ρ- 近傍を含む。

加法＋：$(\xi, \eta)\longmapsto \xi+\eta$ と，対応：$\xi\longmapsto -\xi$ が，§3.3.2.3 で述べた意味において，連続である。

また同様の意味で，乗法×：$(\xi, \eta)\longmapsto \xi\times\eta$ と，対応：$\xi\longmapsto \xi^{-1}$ が，連続である。

3.4.3 比の実数表現

差x, $y\neq 0$で

$$x=u_{\times}m,\qquad y=u_{\times}n$$

となる差u，整数m, nのとれないものがあってよいという考え方に立ち，しかしこのときにも比x：yは考えられるようにしておこうとするとき，実数の援用(注)ということになる。これは，つぎのような考え方で為される。

先ず，差 x, $y>0$ に対し

$$x=u_{\times}m,\qquad y=u_{\times}n$$

となる差 $u>0$，整数 m, $n>0$ を求める論理的操作として，“ユークリッドの互除法”を導入する。このとき，≪$x=u_{\times}m$, $y=u_{\times}n$ となる u, m, nがとれない≫とは，ユークリッドの互除法の操作が論理上無限に続くということの意味になる。

ところで，ユークリッドの互除法によると，差x, yに対するそれの整数比 m：nは，つぎのようにして得られる。即ち，$x>y$ として，

$$\begin{array}{ll} x=y_{\times}k_1+r_1 & (r_1<y)\\ y=r_{1\times}k_2+r_2 & (r_2<r_1)\\ r_1=r_{2\times}k_3+r_3 & (r_3<r_2)\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot \end{array}$$

のように展開していったとき，或るpに対し $r_{p-1}=r_{p\times}k_{p+1}$ となれば，連分数

$$k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\ +\cfrac{1}{k_p+\cfrac{1}{k_{p+1}}}\end{array}}}$$

を計算した結果が $\dfrac{n}{m}$ である。

ユークリッドの互除法が無限に続くとき，上の形の連分数が無限に作られていく。ところでこの数列は，コーシー列になっている。したがってそれは一つの実数を定義する。そこで比x：y をこの実数のこととして定義するのである。

(註)　自然数から整数，整数から有理数，そして有理数から実数の各導出は，すべて形式的に行なうことができる。したがって，比の表現に実数を援用するやり方は，循環論法にはならない。

3.4.4 差に対する比の作用

3.4.4.1 比　の　作　用

差に対する比の作用$_{\times}$を（比を右から掛ける形で),

$$x_{\times}(x:y)=y\quad (x\neq 0),$$
$$0_{\times}\xi=0$$

と定義する。したがって,

$$x\neq 0 \Longrightarrow (x_{\times}\xi=y \Longleftrightarrow \xi=x:y).$$

このとき,

$$(x+y)_{\times}\xi=x_{\times}\xi+y_{\times}\xi,$$
$$x_{\times}(\xi\times\eta)=(x_{\times}\xi)_{\times}\eta,$$
$$x_{\times}(\xi+\eta)=x_{\times}\xi+x_{\times}\eta,$$

$$x_\times 1 = x$$

であり，また，

$$x_\times 0 = 0,$$

$$(-x)_\times \xi = x_\times(-\xi) = -(x_\times \xi),$$

である(註)。

(註)　$(-x)_\times \xi = x_\times(-\xi) = -(x_\times \xi)$ と，$(x+y)_\times \xi = x_\times \xi + y_\times \xi$ の二つを示す。(残りは自明である。)

1) $\xi = x : (-y)$ とおくとき，$\xi = (-x) : y$ で，$(-x)_\times \xi$，$x_\times(-\xi)$，$-(x_\times \xi)$ はいずれも y に等しい。

2) $x=0$ か $y=0$ のときは自明。$x+y=0$ ならば $(x+y)_\times \xi = 0$，そしてまた $y=-x$ だから $x_\times \xi + y_\times \xi = 0$。残るは，$x$，$y$，$x+y \neq 0$ の場合である。しかし，$x_\times \xi = x'$，$y_\times \xi = y'$ とおくとき，$\xi = x : x' = y : y'$ で，これより $\xi = (x+y) : (x'+y')$。書き直すと，$(x+y)_\times \xi = x' + y' = x_\times \xi + y_\times \xi$。

3.4.4.2　作用の連続性

作用$_\times$: $(x, \xi) \longmapsto x_\times \xi$ は，≪$x_\times \xi$ の r-近傍に対して，差 $e>0$ と比 $\varepsilon>0$ で，条件：

x' が x の e-近傍に属し，ξ' が ξ の ε-近傍に属するとき，$x'_\times \xi'$ は $x_\times \xi$ の r-近傍に属する．

を満たすものがとれる≫という意味で，連続である(註)。

(註)　$x = u_\times \alpha$，$u>0$ とする。$x_\times \xi$ の r-近傍は，或る $\delta>0$ に対する

$$U =]\, x_\times \xi - u_\times \delta,\ x_\times \xi + u_\times \delta\, [$$
$$=]\, u_\times(\alpha \times \xi - \delta),\ u_\times(\alpha \times \xi + \delta)\, [$$

の形の開区間を含む。そして，$\varepsilon = min(\delta / (|\alpha| + |\xi| + 1),\ 1)$，$e = u_\times \varepsilon$ とおくとき，$\varepsilon>0$，$e>0$ で，x の e-近傍と ξ の ε-近傍は条件を満たす。