論　説

分数の教材研究

宮　下　英　明*

1. “数とは何か？”

“数とは何か？”と尋ねられて困るのは，子供だけではない．

私たちは，いままでに，“数とは何か？”というように改めて考えたことがない．だからこのような質問を受けると面食らってしまう．

この場合，“改めて考えたことがなかった”ということは“改めて考えさせられたことがなかった”ということと同じであろう．

ただ，私たちは次のようにも言いたくなる．すなわち，“数は，それは何かというように考えるものではなく，使うものだ”，と．“数とは何か？”というように考えたことがないのは，“ボールとは何か？”というように考えたことがないのと同じだ，と．

これは，理屈になっている．しかしこのとき，私たちは算数科の意義ということを考える必要がある．

算数科には，言わば生活科の一分野としての意義と，それから，数学としての意義がある．そして，“数とは使うものだ”の言い分は，生活科の立場からは完全に正しい．しかし，“数学としての算数”の立場に立つとき，“数とは何か？”の主題を避けて通ることはできない．この主題を避けることは，“数学としての算数”の立場を捨てることになるからである．

“別に数学にこだわらなくてもよいではないか”という言い分もあるだろう．しかし，“数とは何か？”の問題から逃げ続けることも，実際には難しい．

例えば，“量計算に分数計算が使えること”を分数計算の指導の目標に据えるとき，“分数に現れている自然数をこのように操作しましょう”式の指導では，この目標に到達できない．やはり，分数計算が量計算として成立する理屈を扱うことになる．そしてこれは，“数とは何か？”の指導にほかならない．

ただし現行は，“数とは何か？”の主題に対しかなり及び腰である．実際，分数の四則計算の導入は，都合的な図に都合的な理屈を立てて済まされる．現行は，子供が

《“それの 2/3 が 5/6 kg になるような重さ”を求める計算は，5/6×3/2 あるいは 5/6÷2/3 になる》

を説明できるようになることを要求していない．式を立てて計算できることでよしとしている．

成長するに従って理屈がわかるようになるというのであれば，現行の指導でも構わないであろう．しかし，理屈は大人になってもわからずじまいというのが，現実である．“理屈ではなく形式感覚で計算する”というのは，子供に限ったことではない．

2. “数とは何か？”の指導の難しさ

ここでの“数とは何か？”の問いは，哲学的な答え（？）を要求するようなものではない．数の使用に理屈が立てられるような数理解を促すことが，この問いの狙いである．

さて，私たちの対象とする数は，私たちに意味のある数である．そしてそれは，私たちの生活に現れる数である．

数は，単独で私たちの生活の中に現れてくることはない．

例えば，自然数であれば，

“僕は，マラソン大会で３等賞になった”

“電線にスズメが３羽とまっている”

* 金沢大学教育学部

のような文に現れ，分数や少数であれば，

“あの棒の長さは，この棒の長さの 2/3”

“足のサイズは，24.5 センチメートルです”

のような文に現れる．

そしてもちろん，これらの文は自分から現れてくるわけではない．私たちの実践から出てくる．

この例では，“僕は，マラソン大会で 3 等賞になった”には“順番をつける”という実践が対応する．“電線にスズメが 3 羽とまっている”には，“計数（カズを数える）”という実践が対応する．“あの棒の長さは，この棒の長さの 2/3”，“足のサイズは，24.5 センチメートルです”には，“測定”という実践が対応する．

これらの実践において，数は，“順序値”，“計数値”，“測定値”として登場する．そしてこれが，数の意味——数の使用における数の身分——になる．

ここには，数の異なる意味がある．そしてこの異なる意味を確認することは，“数”に関しての重要な主題である．しかし，数が 1 つの意味では捉えられないということが，一方で，指導の難しさの問題になってくる．

“数とは何か？”の指導の本当の難しさは，個々の内容に関するよりは，数が 1 つの意味では捉えられないという点にある．一貫した見方で，自然数も分数，少数も扱えれば簡単なのであるが，そのようにはならないし，してもいけない．数の指導は，数の異なる意味を大事にするものでなければならないのである．

本稿では，このうち，分数について考えてみる．

3. 測定値としての分数と，“倍/比”

“あの棒の長さは，この棒の長さの 2/3”，“水のかさは，2/3 リットルです”の表現は，“測定”によってもたらされる．

測定とは，単位による測定である．上の 2 つの表現では，それぞれ〈この棒の長さ〉と〈リットル〉が測定の単位になっている．そしてこの単位に対する測定値が 2/3 というわけである．形式的に書くと，

あの棒の長さ＝この棒の長さの 2/3

水のかさ＝リットルの 2/3

となる．

このように，生活に現れる分数は，つねに単位つきである（小数についても同様）．

ところで，“単位”といっても，それは“単位”という身分で見られた量のことであり，量として特別な意味があるわけではない．単位の〈この棒の長さ〉は〈あの棒の長さ〉と同質であり，単位の〈リットル〉は〈水のかさ〉と同質である．

よって，

あの棒の長さ＝この棒の長さの 2/3

水のかさ＝リットルの 2/3

における数の 2/3は，1 つの量に対するこれと同じ範疇のもう 1 つの量の関係を表していると，見なせる．このことを図式：

$$\text{あの棒の長さ} \xleftarrow{2/3} \text{この棒の長さ}$$

$$\text{水のかさ} \xleftarrow{2/3} \text{リットル}$$

で表すことにしよう．

矢線で表した関係の名を，日常語から捜すとすれば，何が適当であろうか．私たちはこれを“倍”とか“比”と呼びたくなる．

こうして，量に関する“倍”ないし“比”が，生活に現れる分数の意味ということになる（小数についても同様）．

分数の意味が，決まった．では，“2/3”の表現は，どのような決まりの下に出てくるのであろう．

4. “量”の決まり

私たちは，量をある一定の形式のものとして考えて扱っている．そして，この形式を前提とすることで，量に関する倍/比の関係が分数，小数の形に表現されるようになる．

その形式は，次のようになる．

量には 1 つの算法が与えられている．これを“加法”と呼び，数と同様記号＋で表すことにしよう．

＋については，交換，結合法則のほかに，次の“等分可能性”が条件になる：

任意の量 y と，自然数 n に対し，n 回の累加が y に等しくなるような量 x が存在する．

通常，私たちはこのような x を，あまり適切ではないが，簡単に“y の n 等分”と呼んでいる．また，これも適切な言い方ではないが，y を“x の n 個分”と呼んだりする．

“x の n 個分”の言い方に倣って，x の n 回の累加を

x の n

と表すことにしよう．また，“n 等分”は“n 個分”の逆の関係にあるから，“y の n 等分”を

y の n^{-1}

と表すとしよう．

このとき，y が x の n 回の累加であることは，

$y=x$ の n あるいは y の $n^{-1}=x$

で表されることになる．

このように表現するとき，n，n^{-1} は，1 つの量に対するこれと同じ範疇のもう1つの量の関係を表していると，見なせる．このことを図式：

$$y \underset{n^{-1}}{\overset{n}{\rightleftarrows}} x$$

で表すことにしよう．また，矢線に対する読み方として，“倍”を用いるとしよう．

x の 1 回の累加は x 自身であるから，

x の $1=x$

であり，また，x の m 回の累加と x の n 回の累加の和は x の $(m+n)$ 回の累加であるから，

x の $m+x$ の $n=x$ の $(m+n)$

である．

なお，算数科では，量に対して記号“＋”，“＝”を用いることを許していない．“＋”，“＝”は数に対してのみ用いる．実際，小学生に“二種類の＋，＝”を本当に理解させることは，困難であろう．

“二種類の＋，＝”は，高校で登場させる．ただしそのときには，“量”と“数”がそれぞれ“ベクトル”と“スカラー”になっているが．

5.　分数表現の決まり

先に登場させた分数の図式

$$\textbf{この棒の長さ} \xrightarrow{2/3} \textbf{あの棒の長さ}$$

を，簡単に

$$x \xrightarrow{2/3} y$$

と書くことにする．さて，これの意味であるが，それは次のようになる：

(1)　$x=u$ の 3，$y=u$ の 2 となる u が存在する

(2)　x の $2=v$，y の $3=v$ となる v が存在する

(3)　x の $3^{-1}=y$ の 2^{-1}

(4)　x の $2=y$ の 3

(5)　（x の 3^{-1}）の $2=y$

(6)　（x の 2）の $3^{-1}=y$

どの条件も同じことになるが，現行では，専ら(5)（“x の 3 等分の 2 つ分が y”）で教えている．

次は，上の(1)から(5)を 1 つの図式に表したものである：

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, shift left, "3"] \arrow[dr, "2"] & \\
x \arrow[ur, shift left, "3^{-1}"] \arrow[rr, "2/3"] \arrow[dr, "2"'] & & y \arrow[dl, shift left, "3^{-1}"] \\
 & v \arrow[ur, shift left, "3"] &
\end{tikzcd}$$

6.　分数の相等関係

分数による量の倍関係表現では，“表現の同値”の問題が生じる．実際，見掛けの異なる分数で，同じ倍関係の表現になるものが存在するわけである．

私たちは，《同じ倍関係の表現になる分数はもともと同一》の立場をとるから，“表現の同値”の問題は，“分数の相等”の問題に読み換えられる．

分数の相等は，次の式で表現される：

$$\frac{q}{p}=\frac{q\times n}{p\times n}$$

例えば 2/3 の場合，

$$x \xrightarrow{2/3} y$$

は

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & \\ x & & y \end{tikzcd}$$

となる u が存在することを意味し，このとき任意の整数 $n>0$ に対し

$$\begin{tikzcd} & u \text{ の } n^{-1} \arrow[d, "n"] \arrow[ddl, bend right, "n\times3"'] \arrow[ddr, bend left, "n\times2"] & \\ & u \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & \\ x & & y \end{tikzcd}$$

の関係が導かれる（ここで，“量の等分可能性”の条件を用いている）．そしてこれは，

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times n}{3\times n}$$

を示している．

7. 分数の加法

分数の加法は，私たちの実践では，量の和の計算に現れる．例えば，“長さ x の 2/3 と 4/5 の和は，x のどれだけか？”という問題に対し，2/3＋4/5 が立式される．

この立式は，次の理屈に従っていることになる：

$$x \text{ の } 2/3+x \text{ の } 4/5=x \text{ の } (2/3+4/5)$$

そこで，逆に，これが 2/3＋4/5 の定義になる．すなわち，

$$x \text{ の } 2/3+x \text{ の } 4/5=x \text{ の } n/m$$

となる n/m に対し，2/3＋4/5 が

$$2/3+4/5=n/m$$

で定義される．

分数の＋が定義されるとき，$n/m-q/p$ が，$q/p+v/u=n/m$ となる v/u として定義される．

8. 分数の加法の公式

異分母分数の和は同分母分数の和に書き直すことができる．したがって，分数の和は同分母分数の和を考えれば十分ということになる．

いま例として，2/3＋5/3 を考えよう．2/3＋5/3 は，図式：

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "2/3"'] \arrow[dr, "5/3"] \arrow[dd, "2/3+5/3"] & \\ y_1 & & y_2 \\ & y_1+y_2 & \end{tikzcd}$$

で定義されるところの倍である．2/3, 5/3 の定義より

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[dr, "3"] \arrow[dd, "2"'] & & u_2 \arrow[dl, "3"'] \arrow[dd, "5"] \\ & x \arrow[dl, "2/3"] \arrow[dr, "5/3"'] & \\ y_1 & & y_2 \end{tikzcd}$$

となる量 u_1，u_2 が存在するが，この 2 つは一致する（実際，ともに x の 3^{-1}）．これを u で表すと

$$y_1+y_2=u \text{ の } 2+u \text{ の } 5=u \text{ の } (2+5)$$

よって，2/3＋5/3＝(2＋5)/3 となる．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, "3"] \arrow[ddl, "2"'] \arrow[ddr, "5"] & \\ & x \arrow[dl, "2/3"] \arrow[dr, "5/3"'] & \\ y_1 & & y_2 \end{tikzcd}$$

計算の公式は，

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}+\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle+\square}{\bigcirc}$$

である．

なお，異分母分数の和を直接求める手続きは，3/4 と 5/6 を例とすると，次の図式のようになる（“量の等分可能性”の条件を用いて，u_1 と u_2 を共約する量 v を導入する手続きが加わる）：

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] \arrow[dd, "12"] \arrow[dddl, bend right, "3\times3=9"'] \arrow[dddr, bend left, "2\times5=10"] \arrow[dddd, dashed, bend left=90, "9+10=19"] & \\ u_1 \arrow[dr, "4"] \arrow[dd, "3"'] & & u_2 \arrow[dl, "6"'] \arrow[dd, "5"] \\ & x \arrow[dl, "3/4"] \arrow[dr, "5/6"'] \arrow[dd, "3/4+5/6=19/12"] & \\ y_1 & & y_2 \\ & y_1+y_2 & \end{tikzcd}$$

また，加法の公式

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}+\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle+\square}{\bigcirc}$$

より

$$\frac{\triangle+\square}{\bigcirc}-\frac{\triangle}{\bigcirc}=\frac{\square}{\bigcirc}$$

であるから，$\square=(\triangle+\square)-\triangle$を考慮して，次の減法の公式が得られる：

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}-\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle-\square}{\bigcirc}$$

9. 分数の乗法

分数の乗法は，私たちの実践では，量の倍の倍の計算に現れる．例えば，“長さ x の2/3 の 4/5 は，x のどれだけか？” という問題に対し,2/3×4/5 が立式される．

この立式は,次の理屈に従っていることになる：

(x の 2/3) の 4/5＝x の (2/3×4/5)

そこで,逆に，これが 2/3×4/5 の定義になる．すなわち，

(x の2/3) の 4/5＝x のn/m

となる n/m に対し，2/3×4/5 が

2/3×4/5＝n/m

で定義される．

分数の×が定義されるとき，$n/m\div q/p$ が，$q/p\times v/u=n/m$ となる v/u として定義される．

10. 分数の乗法の公式

分数の加法の場合，その計算は同分母分数同士の計算に還元され，計算公式は，

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}+\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{\triangle+\square}{\bigcirc}$$

であった．これに対し，分数の積の方は $\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\square}{\triangle}$ の形の積に還元され，そしてこのとき

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\square}{\triangle}=\frac{\square}{\bigcirc}$$

が計算公式になる．

例として，2/3×5/2 を考えよう．2/3×5/2 は，図式：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "2/3"] \arrow[rr, bend right, "2/3\times5/2"'] & y \arrow[r, "5/2"] & z \end{tikzcd}$$

で定義されるところの倍である．2/3, 5/2 の定義より

$$\begin{tikzcd} & u_1 \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & & u_2 \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "5"] & \\ x \arrow[rr] & & y \arrow[rr] & & z \end{tikzcd}$$

となる量 u_1，u_2が存在するが，この 2 つは一致する（実際，ともに y の 2^{-1})．これを u で表すと

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "5"] & \\ x & & z \end{tikzcd}$$

となり，これは

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "5/3"] & z \end{tikzcd}$$

を意味している．したがって

2/3×5/2＝5/3

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "3"'] \arrow[d, "2"] \arrow[dr, "5"] & \\ x \arrow[r, "2/3"] \arrow[rr, bend right, "2/3\times5/2=5/3"'] & y \arrow[r, "5/2"] & z \end{tikzcd}$$

なお，一般の分数の積を直接求める手続きは，4/5 と 7/6 を例とすると，次の図式のようになる（“量の等分可能性” の条件を用いて，u_1と u_2を共約する量 v を導入する手続きが加わる)：

$$\begin{tikzcd} & & v \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] \arrow[ddll, bend right, "3\times5=15"'] \arrow[ddrr, bend left, "2\times7=14"] & & \\ & u_1 \arrow[dl, "5"'] \arrow[dr, "4"] & & u_2 \arrow[dl, "6"'] \arrow[dr, "7"] & \\ x \arrow[rr, "4/5"'] \arrow[rrrr, bend right, "4/5\times7/6=14/15"'] & & y \arrow[rr, "7/6"'] & & z \end{tikzcd}$$

また，乗法の公式

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\square}{\triangle}=\frac{\square}{\bigcirc}$$

より

$$\frac{\square}{\bigcirc}\div\frac{\triangle}{\bigcirc}=\frac{\square}{\triangle}$$

が導かれるが，これが分数の除法の公式になる．

ただし，私たちが実際に使っている公式は，次のものである：

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}\div\frac{\blacktriangle}{\bullet}=\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{\bullet}{\blacktriangle}$$

そしてこの公式の方は，次のようにして得られる．

例として 2/3÷4/5 を考えることにする．

2/3÷4/5 は，4/5 との積が 2/3 になる数のことである．そこでこの数を α で表すと，

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "2/3"'] & y \arrow[r, "4/5"] & z \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "4/5"] \arrow[rr, bend right, "2/3"'] & y \arrow[r, "\alpha"] & z \end{tikzcd}$$

の 2 通りの図式が立つ．そして，4/5 の逆倍を $(4/5)^{-1}$ で表すとき，これらはそれぞれ図式

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "2/3"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & z \arrow[r, "(4/5)^{-1}"] & y \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd} y \arrow[r, "(4/5)^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & x \arrow[r, "2/3"] & z \end{tikzcd}$$

と同値である（例えば第一の図式の場合，$\alpha=\alpha\times 4/5\times(4/5)^{-1}=2/3\times(4/5)^{-1}$）．そして 4/5 の逆倍$(4/5)^{-1}$ は 5/4 であるから，それぞれの図式から

$\alpha=2/3\times5/4$，$\alpha=5/4\times2/3$

が得られる．

11.　自然数に対する分数の解釈

私たちは，y が x の n 回の累加であることを，図式

$$x \xrightarrow{n} y$$

で表すことにした．さて，この x と y に対しては，$y=x$ の（$n/1$）の図式

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "n"] & \\ x \arrow[rr, "n/1"'] & & y \end{tikzcd}$$

が立つ．

この意味から，自然数 n を分数 $n/1$ と同一視することにしよう．

このとき，自然数 m，n の和

$m+n$

は分数（$m+n$)/1 と同一視されるが，この分数は $m/1+n/1$，すなわち，

（分数としての m）＋（分数としての n）

と等しい．また，自然数 m，n の積

$m\times n$

は分数（$m\times n$)/1 と同一視されるが，この分数は $m/1\times n/1$，すなわち，

（分数としての m)×(分数としての n)

と等しい．このことは，自然数の算法の＋，×を分数の算法の＋，×と見なせることを示している．

こうして，自然数は算法込みで分数と見なせることになる．数学ではこのことを，“自然数の系は分数の系に埋め込まれる”のように言い表す．

12.　“自然数÷自然数”

自然数÷自然数は，÷が自然数の乗法×の逆算として考えられているときには，定義されない場合が出てくる．例えば，2÷3 は定義されない．

しかし，÷が分数の乗法の逆算として考えられているとき（したがって，自然数も分数として考えられているとき）には，つねに定義されることになる．そして実際，

$$2\div3=\frac{2}{1}\div\frac{3}{1}=\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2\times3}{1\times3}\times\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{1\times2}{1\times3}=\frac{2}{3}$$

となる．“2÷3=2/3” の左辺の “2÷3” の “2”，“3” の身分が分数で，右辺の “2/3” の “2”，“3” の身分が自然数であるという点にも，留意しておこう．

なお，2÷3 の図式は

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & y \arrow[r, "\alpha"] & z \end{tikzcd} \quad \text{ないし} \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & y \arrow[r, "3"] & z \end{tikzcd}$$

であるが，これは 2/3 の図式

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "3"'] \arrow[dr, "2"] & \\ y \arrow[rr, "\alpha"] & & z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "2"'] & & y \arrow[dl, "3"] \\ & z & \end{tikzcd}$$

になっている．この意味でも 2÷3＝2/3 がわかる．

13.　現行の分数指導について

分数について話してきたが，ここでの分数の取上げ方は，現行の分数の指導の仕方とは全く違っている．このことで辟易した読者も多いことであろう．

全く違ってしまった理由は何であろう？それは，分数の意味にこだわって，“生活の中に現れる分数”の立場を貫いてみたからである．

“生活の中に現れる分数”は，量に関する“倍”ないし“比”であった．したがって，意味が問題になっているときの分数は，“量つき”になる．量と 1 つのシステムをなすという理由で，量と切り離すことができない．この場合，分数を取り上げることは，同時に量を取り上げることなのである．

本稿では分数を“両端に量をもつ矢線”で表現したが，量つき（詳しくは，2 量つき）の分数の表現として，これは必然的であると言える．実際，矢線を避けるにしても，2 量の明示は避けられないのである．

さて，“意味が問題になっているときの分数”という言い方をしたが，それは，意味を問題にしない分数の扱いが，現にあるからである．すなわち，“数計算”である．数計算は，算法の定義の〈意味〉には依存していない．定義された算法の〈形式〉のみに依存している．

分数をそれのみで自立する（特に，量に依存しない）系として確立するヒントが，ここにある．

算法の定義は，意味に基づいてなされる．しかし，一旦定義されたそれは，“意味のない約束”と見なすことができる．さらに，分数に対して，“約束から生成された体系”という見方が可能になる．分数は，こうして，それのみで自立する（特に，量に依存しない）系となる．

さらに，この系に対しては，量と同じ構造を見ることができる（“量の抽象としての数”の発想は，このような形で合理化される）．

現行の指導になる分数は，この段階にある分数である．それのみで自立しており，量に依存していない．それ自体量であるというように指導しているから，量に依存していない道理である．

確かに，現行の分数指導において量は援用されるが，それは“分数は量と 1 つのシステムをなす”という立場からではない．量の援用は，あくまでも都合的なもので，指導法の観点からなされているに過ぎない．ここでの量の援用には，理論はない．

分数の導入の仕方に，本稿で取り上げたものと現行の指導法の 2 つがあるというようには，思わないでもらいたい．現行の指導法には，意識的/無意識的に欠落させているものがあるのである．それは，理論的な欠落ということになるが，欠落させている分，論理は曖昧で矛盾したものにならざるを得ない．

この理論的な欠落は，1 つに，“方便”と解釈できるであろう．“小学生に分数の理屈を教えることはできない”と考えられた結果である，と．

しかし一方，“自分が理解している分数を教えようとしているのがそのまま現行の指導である”の感も，否めない．そしてこの場合には，指導法がどうのこうのと言う以前に，指導する側の主題理解が問題になる．

現行の指導が理論的に欠落させている部分を本稿で改めて述べてみることにしたのは，このような理由からである．