論　　説

数と量の関係は，＜数は量の比＞であって ＜数は量の抽象＞ではない *

宮　下　英　明 **

要　約

数と量の関係は＜数は量の比＞である。一方，現前の算数教育は＜数は量の抽象＞を択っている。こうなった経緯のうちには，かつての「割合論争」も契機の一つとしてある。

＜数は量の比＞を確証する方法は，唯一数学に即くことである。数の範囲を自然数から複素数，四元数，さらにその先まで拡げ，数と量の構造，量計算の構造を数学的に論述することが，これの方法である。このとき，量は，一つの数の系 (N, ＋ , ×) から導かれる系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) に同型なもののことになる。そして数と量が構造の違うものであり, 特に量の構造が数を内に組み込むものであることから, ＜数は量の抽象＞が退けられることになる。

キーワード： 数と量，量の比，量の抽象

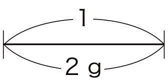
1．はじめに――論考の趣旨

算数教育では，＜数は量の抽象＞の立場がひろく受け入れられている。この立場では，数は，自然数ならタイル / ブロックの個数，分数なら線分の長さや長方形等の図形の面積で表現されるものになり，量の計算問題もこの表現形態の上で解くことが指導される。

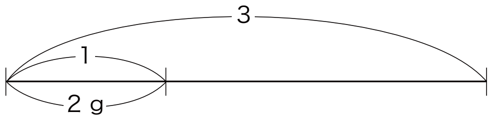
この問題解法は，「数直線」「１と見る / １あたり量」「比の３用法」「形式不易の原理」を用いることを特徴とする。

これにそのまま倣えば, 例えば「２ｇ (グラム) の３倍は何ｇ か？」の問題はつぎのように解くことになる：

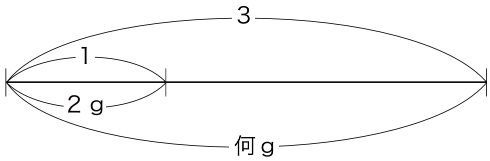
２ｇを１あたり量にする：



１の線分の３倍の長さの線分が，３になる：



この３に，何ｇが対応する：



比の第２用法により，何＝２× ３。

一方，数学であれば，この問題は＜数は量の比＞で解くことになる：

「２ｇの３倍が何ｇ」の関係を書く：

$$2g \xrightarrow{3} 何g$$

２ｇと何ｇがそれぞれｇの２倍と何倍であることを書く：

* 平成 23 年 1 月 26 日受付，平成 23 年 7 月 1 日決定
** 北海道教育大学教授

$$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何"'] & 2\mathrm{g} \arrow[r, "3"] & 何\mathrm{g} \end{tikzcd}$$

積 (記号「×」) の文法として，２倍の３倍が 2× ３倍になる：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{g} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "何 = 2\times 3"'] & 2\mathrm{g} \arrow[r, "3"] & 何\mathrm{g} \end{tikzcd}$$

注意：＜数は量の比＞では，「ｇ (グラム)」は一つの重さ (量) の呼び名である。そして，「ｇの１倍」「ｇの２倍」‥‥の短い言い方が「１ｇ」「２ｇ」‥‥である。

ここで謂う「数は量の比」は，「数は，量の関係概念＜比＞の対象概念化」を短くしたものである。数はつぎの図式で表現されるものになる：

$$量a \xrightarrow{数n} 量b$$

いまこれを「ｂはａのｎ倍」と読んでみる。ｂのａ相対的な表現になった。実際この「ある量に対しどれだけ」が「量表現」の形である。数の道具性は量計算を見込む量表現であるが，量表現する数は (＜量の抽象＞ではなく) ＜量の比＞である。

＜数は量の抽象＞の解法は，線分図作成も比の３用法の適用も，＜数は量の比＞を暗黙に使用する循環論法になっている。実際，数と量は形式の異なるものであるから，＜数は量の抽象＞による量計算というものは，そもそも矛盾なのである。

現前の＜数は量の抽象＞の歴史的背景には，唯物論のイデオロギーがある。物から数学を導くことは無理な企てであり，これを敢行すれば，＜数は量の抽象＞のように循環論法をやっていくものになる。しかし唯物論はひとにとって「わかりやすい」。わかりやすさでひとに＜数は量の比＞か＜数は量の抽象＞かを択ばせれば，＜数は量の抽象＞になる。学校の算数教育で択ばれているのも，＜数は量の抽象＞の方である。

算数教育の＜数は量の抽象＞には歴史的経緯があり，そのなかに特に，「割合論争」と呼ばれた＜数は量の比＞と＜数は量の抽象＞の論争が過去にあった。そしてこれに歴史の偶然を見るならば，現前の算数教育の＜数は量の抽象＞は，相対的にとらえていくべきものなのである。

＜数は量の比＞か＜数は量の抽象＞の論は，「数」を自然数や分数の範囲で見ていたのでは，「割合論争」のように，論争になる。この範囲では，唯物論が雄弁になれるからである。

こうならないようにする行論の方法は，唯一数学に即くことである。数の範囲を自然数から複素数，四元数，さらにその先まで拡げ，量計算の構造を数学的に記述することが，このときの方法である。本論考は，これを行う。

本論考では，見通しの悪い論にならないよう，論述の簡明を心掛ける。一方，この分野にあまり馴染みのない読者のあることも想定して，わかりやすさのため，図の多用や，例から入っていく論述スタイルも，紙幅の許す限り用いていくことにする。

2. 数・量の構造

＜数は量の比＞の論述は，数と量を構造として記述することが，誤解の入り込む余地を無くす上で必要になる。そこで，最初にこれを行う。

(1) 数の構造：$(\mathrm{N}, +, \times)$

「自然数」のことばは，１，２，３，‥‥の個々の数を指すのにも，これら全体で成る集合を指すのにも，用いられる。集合の方を「自然数 (集合)」と呼ぶとしよう。これは，$\mathbb{N}$ で表わされる。個々の数は $\mathbb{N}$ の要素ということになったので，これを「自然数 (要素)」と呼ぶとしよう。

自然数では「和」と「積」が考えられている。すなわち，自然数 (集合) には，内算法である加法＋と乗法×が考えられている。自然数がこのように自然数(集合) と加法＋と乗法 × を構成要素とする系――「自然数 (系)」――であるということを，$(\mathbb{N}, +, \times)$ で表すことにする。

以上自然数について，これの系を表現した。しかし，この表現を導いてきた論法は，他の数 (整数，有理数，複素数，‥‥) でも同じになる。そこで一般に，「数」

が系，集合，要素のいずれを指すかでそれぞれ「数（系）」「数（集合）」「数（要素）」の言い回しを用いることにし，そしてつぎを数（系）の表現とする：

$$(N, +, \times)$$

（母体の集合 N，加法＋，乗法 ×）

⑵ 量の構造：$((Q, \mathbf{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$

「数」を構造で表現したように，「量」の構造を押さえこれを表現するとしよう。

「長さ」では，（「3 ㎝の長さ」のように）個々の長さが考えられている。この個々の長さ全体の集合を考え，Q で表す。個々の長さは Q の要素ということになったので，これを「長さ（要素）」と言い表す。一方，Q の方を「長さ（集合）」と言い表す。

２つの長さ（要素）の間には，比が考えられている。そして，この比の表現に用いることになるのが，数である。長さに伴う数が $(N, +, \times)$ であるとしよう。（長さの場合，N は通常実数 $\mathbb{R}^+$ を考えることになる。）

「比」の別表現に「倍」がある。この二つの表現は，$\mathbf{q}$，$\mathbf{q}' \in Q$ と $n \in N$ に対するつぎの＜言い換え＞の関係にある：

「$\mathbf{q}$ と $\mathbf{q}'$ の比は n」$\rightleftarrows$「$\mathbf{q}$ の n 倍は $\mathbf{q}'$」

この倍を，Q の要素に対する N の要素の作用（外算法）と解釈し，記号「${}_{\boldsymbol{\times}}$」で表す。すなわち，「q の n 倍」を $\mathbf{q} {}_{\boldsymbol{\times}} n$ で表す。（数の「×」と区別されるよう，「${}_{\boldsymbol{\times}}$」は下付けで太字の小さい「×」である。）

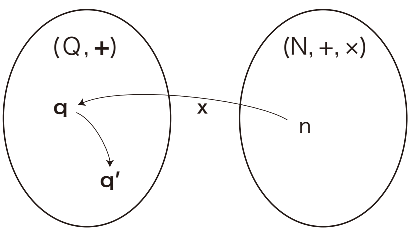
ここまでで長さは，長さ（集合）Q と数 $(N, +, \times)$ と倍作用 ${}_{\boldsymbol{\times}}$ を構成要素とする系ということになった 。この系 ―「長さ（系）」― をつぎのように表すとしよう：

$$(Q, {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$$

ところで，長さでは「和」が考えられている。すなわち，長さ（集合）Q には，内算法である加法が考えられている。この加法を，記号「$\mathbf{+}$」で表す。（数の「＋」と区別されるよう，「$\mathbf{+}$」は太字の「＋」である。）

こうして，長さ（系）は最終的につぎの構成になった：

$$((Q, \mathbf{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$$



以上「長さ」について，これの系としての構成を示した。しかし，この構成を導いてきた論法は，他の量（「重さ」「時間」「速さ」・・・）でも同じになる。そこで一般に，「量」が系，集合，要素のいずれを指すかでそれぞれ「量（系）」「量（集合）」「量（要素）」の言い回しを用いることにし，そしてつぎを量（系）の表現とする：

$$((Q, \mathbf{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$$

（母体の集合 Q，Q の内算法の加法 $\mathbf{+}$，
Q の要素に対する数 N の要素の倍作用 ${}_{\boldsymbol{\times}}$）

3．数の道具性

量に対する数の意味は，量を対象化し，量表現・量計算する道具である。この道具性を，形式として，ここで同定しておく（ただし，本論考に必要な範囲で）。

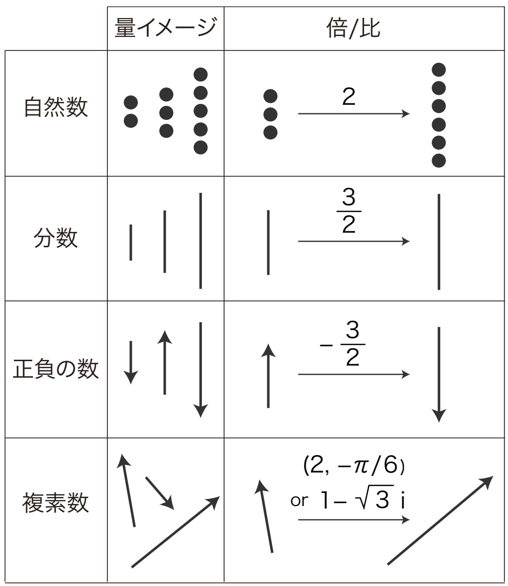
(1) 数の道具的意味：「量の倍/比」

量 $((Q, \mathbf{+}), {}_{\boldsymbol{\times}}, (N, +, \times))$ の「${}_{\boldsymbol{\times}}$」は，Q の要素に対する数 N の要素の作用であり，「倍」をこれの意味に考えている。すなわち，量 $\mathbf{q}$，$\mathbf{q}' \in Q$ と数 $n \in N$ の間の倍関係

$$\mathbf{q} {}_{\boldsymbol{\times}} n = \mathbf{q}'$$

を，「$\mathbf{q}$ の n 倍が $\mathbf{q}'$」と読む。またこの倍関係に対しては，「$\mathbf{q}$ と $\mathbf{q}'$ の比は n」の読み方をする。

これは，「量の倍/比」が数の道具的意味になっているということである。

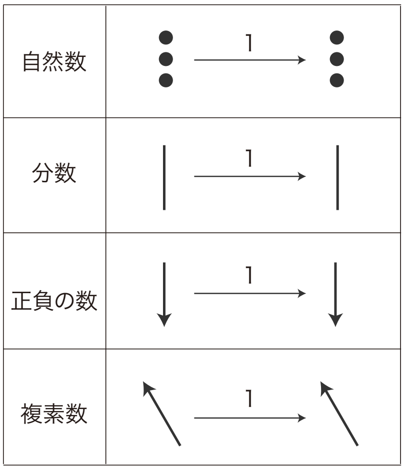


(2)「等倍」を意味とする $1 \in N$ の存在：

$$\mathbf{q} \in Q \text{ に対し } \mathbf{q}\,{}_{\times}\,1 = \mathbf{q}$$

量 $((Q, \boldsymbol{+}),\ {}_{\times},(N, +, \times))$ において，Nの要素は「２量の比」を意味とする。この「２量の比」の一つに，特に「等倍」を考える。すなわち，Nの要素1で，つぎの条件を満たすものを考える：

任意の $\mathbf{q} \in Q$ に対し，$\mathbf{q}\,{}_{\times}\,1 = \mathbf{q}$



(3)「単位」を意味とする $\mathbf{u} \in Q$ の存在：

$\mathbf{q} \in Q$ が $\mathbf{u}\,{}_{\times}\,n$，$n \in N$ の形に一意表現される

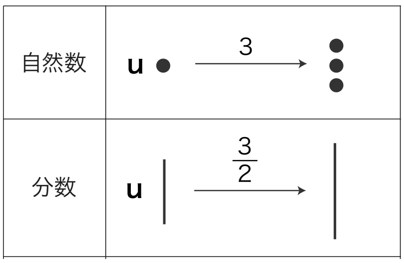
「量」の概念には，「測定」が含意としてある。「測定」の意味の内容になるものは，つぎの条件である：

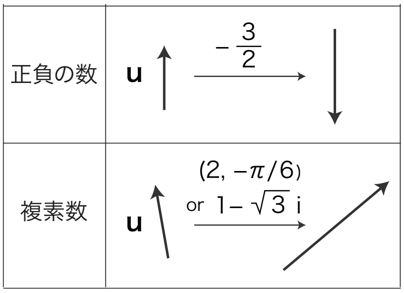
$((Q, \boldsymbol{+}),\ {}_{\times},(N, +, \times))$ においては，つぎの条件を満たす $\mathbf{u} \in Q$ が存在する：

任意の $\mathbf{q} \in Q$ に対し，$\mathbf{q} = \mathbf{u}\,{}_{\times}\,n$ となる $n \in N$ が一意的に存在する。

実際，$\mathbf{u}$ が「単位」と呼ばれるものになる。

自然数・整数を作用素とする量(系)では，単位 $\mathbf{u}$ は一意である。その他の数が作用素の量(系)の場合は，一意でない(任意である)。

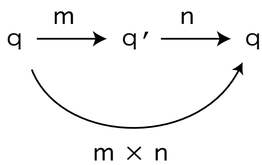


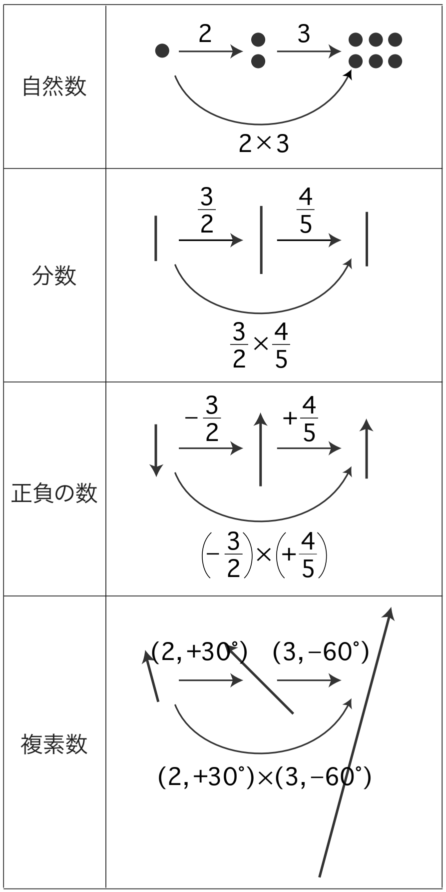


(4) $(\mathbf{q}\,{}_{\times}\,m)\,{}_{\times}\,n = \mathbf{q}\,{}_{\times}(m \times n)$

「量」の概念では，$((Q, \boldsymbol{+}),\ {}_{\times},(N, +, \times))$ における ${}_{\times}$ と N の乗法 $\times$ がつぎのように関係することが，含意になっている：

$$(\mathbf{q}\,{}_{\times}\,m)\,{}_{\times}\,n = \mathbf{q}\,{}_{\times}(m \times n)$$





自然数，分数，････ それぞれの数における求積アルゴリズムは，この関係を成り立たせるものとして導かれる。 ――このとき，各数の求積アルゴリズムは，互いに著しく違ったものになる。

例：分数と複素数の比較

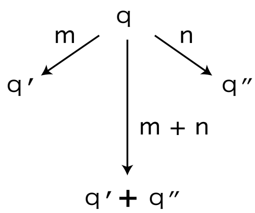
$$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}=\frac{m\times m'}{n\times n'}$$

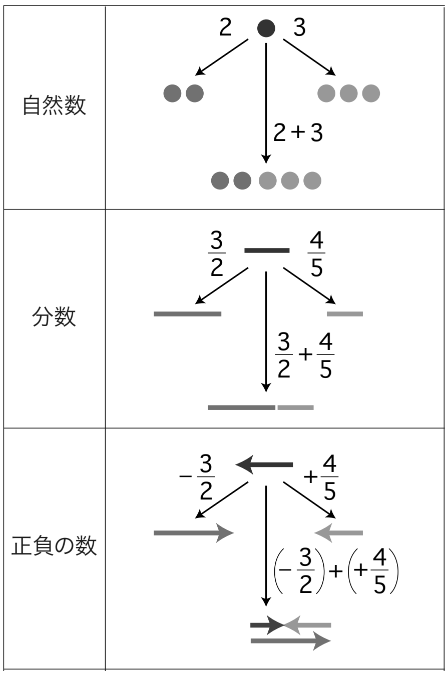
$$(r,\theta)\times(r',\theta')=(r\times r',\theta+\theta')$$

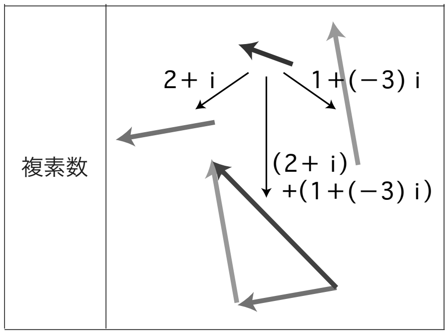
(5) $\mathbf{q}_{\times}m\ \mathbf{+}\ \mathbf{q}_{\times}n=\mathbf{q}_{\times}(m+n)$

「量」の概念では，$((Q,\mathbf{+}),\ _{\times},(N,+,\times))$ における $_{\times}$，Q の加法 $\mathbf{+}$，N の加法＋がつぎのように関係することが，含意になっている：

$$\mathbf{q}_{\times}m\ \mathbf{+}\ \mathbf{q}_{\times}n=\mathbf{q}_{\times}(m+n)$$







自然数，分数，････ それぞれの数における求和アルゴリズムは，この関係を成り立たせるものとして導かれる。 ――このとき，各数の求和アルゴリズムは，互いに著しく違ったものになる。

例：分数と複素数の比較

$$\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{m\times n'+m'\times n}{n\times n'}$$

$$(m+ni)+(m'+n'i)$$
$$=(m+m')+(n+n')i$$

4. 数の道具性から導かれる「数」の条件

量に対する数の道具性の条件は，数の条件を定めるものになる。翻って，数の条件は，量に対する数の道具性の条件である。

ここでは，このような数の条件のうちから主要なつぎのものを取り上げる：単位元 1 の存在，結合法則，左分配法則。

(1) 単位元 1 の存在

量 $((Q,\mathbf{+}),\ _{\times},(N,+,\times))$ において，「等倍」を意味とする $1\in N$ は，N の乗法 × に関する単位元になる。すなわち，任意の $n\in N$ に対し，$n\times 1=1\times n=n$ が成り立つ。

実際，Q の単位 $\mathbf{u}$ に対し，$\mathbf{u}_{\times}(n\times 1)=(\mathbf{u}_{\times}n)_{\times}1=\mathbf{u}_{\times}n$。これより，$n\times 1=n$。また，$\mathbf{u}_{\times}(1\times n)=(\mathbf{u}_{\times}1)_{\times}n=\mathbf{u}_{\times}n$。これより，$1\times n=n$。

(2) 積に結合法則が成り立つ

N の × に結合法則が成り立つ。すなわち，任意の a，b，c $\in N$ に対し，$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ が成り立つ。

実際，Q の単位 $\mathbf{u}$ に対し，$\mathbf{u}_{\times}((a\times b)\times c)$

$= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a \times b)) \boldsymbol{\times} c = ((\mathbf{u} \boldsymbol{\times} a) \boldsymbol{\times} b) \boldsymbol{\times} c = (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} a) \boldsymbol{\times} (b \times c) = \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a \times (b \times c))$。これより，$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

(3) 左分配法則が成り立つ

Nの＋と × の間に，左分配法則が成り立つ。すなわち, 任意のn，a，b ∈N に対し，$n \times (a + b) = n \times a + n \times b$が成り立つ。

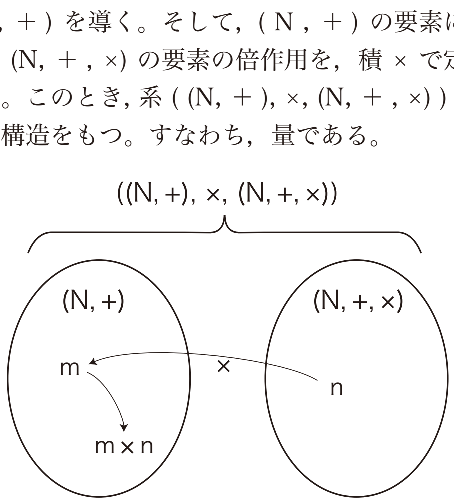
実際，Qの単位$\mathbf{u}$に対し，$\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times (a+b)) = (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} (a+b) = (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} a \;\mathbf{+}\; (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} b = \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times a) \;\mathbf{+}\; \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times b) = \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times a + n \times b)$。これより，$n \times (a + b) = n \times a + n \times b$。

註：本論考の捉える「数の道具性」は，右分配法則 $(a+b) \times n = a \times n + b \times n$ を含意しない。もっとも, 現前の「数」である自然数, 整数，有理数，実数，複素数，四元数，八元数，十六元数 (後述) は，四元数までが分配法則の成り立つものになっている。また八元数 ，十六元数は，× が結合的でなく＜量をもたない数＞ということになるので，数の道具性の規定をさらにこの２つの数に引き寄せて調整するというふうにはならない。

5. 量形式 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

(1)　量 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

数 (N, ＋ , ×) から，Nに加法のみを考えた系 (N , ＋) を導く。そして，(N , ＋) の要素に対する (N, ＋ , ×) の要素の倍作用を，積 × で定義する。このとき, 系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) は，量の構造をもつ。すなわち，量である。



(2)　量の普遍対象 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

量 $((Q, \mathbf{+}), \boldsymbol{\times}, (N, +, \times))$ に対し，写像 $f : Q \longrightarrow N$ を $f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) = n \quad (n \in N)$ で定義する。 f は，QとNの間の１対１対応になる。さらに，つぎが成り立つ：

$$f(\mathbf{x} \mathbf{+} \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in Q)$$

$$f(\mathbf{x} \boldsymbol{\times} n) = f(\mathbf{x}) \times n \quad (\mathbf{x} \in Q,\ n \in N)$$

実際，$f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} m \;\mathbf{+}\; \mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) = f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (m + n)) = m + n = f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} m) + f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n)$。$f((\mathbf{u} \boldsymbol{\times} m) \boldsymbol{\times} n) = f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (m \times n)) = m \times n = f(\mathbf{u} \boldsymbol{\times} m) \times n$。

これは，$((Q, \mathbf{+}), \boldsymbol{\times}, (N, +, \times))$ が ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) と同型であることを示す。翻って，つぎが「量」の定義になる：

数 (N, ＋ , ×) に対し, ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) と同型な系 $((Q, \mathbf{+}), \boldsymbol{\times}, (N, +, \times))$ を，(数 (N, ＋ , ×) に対する) 量と呼ぶ。

特に, ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) は,「数 (N, ＋ , ×) に対する量」の普遍対象ということになる。

量のこの構造的特徴づけは，そのまま＜数は量の抽象＞を退ける論法になる。一つの数の系 (N, ＋ , ×) が導く系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) が，量の構造である。数と量は構造において既に違っている。しかも量は数を内に組み込む。＜数は量の抽象＞とはならない。

註：数 (N, +, x) が導く量の普遍対象 ((N , ＋), ×, (N , ＋ ,×)) の話は, さらに位の普遍対象 (N , ＋ , ((N , ＋), ×, (N , ＋ ,×))) の話に進む。「位」については，[宮下 ,2011] の「位」の章にあたられたい。

(3)　量の存在論

数学では，量は形式になる。そして，この形式は数を用いて表現される。この意味で，数が量という存在をつくる。

数と量の関係については，つぎの唯物論の考え方がある：「*リアルな量が先ずあり，これを抽象して数が得られる。*」

唯物論の土俵で「*数から量か？量から数か？*」の論をやり出すと，これは哲学で延々とやられてきた「コトバとモノ」の存在論になる。本テクストは，この土俵にはのぼらない。実際，のぼることは無用である。「数と量」の数学が，そもそも

唯物論を含め存在論から導かれるものではないからである。

「数と量」の数学がリアルへ適用して所期の結果をもたらすものになっているのは，これが存在の反映ないし抽象だからではない。リアルへ適用して所期の結果をもたらすように，はじめからつくられているからである。包丁で肉を切れるのは，包丁が肉の反映ないし抽象だからではない。肉を切れるものとしてつくっているからである。

量にしても，リアルの側にあるのではない。例えば,「速さ」はリアルの側にあるのではない。「速さ」の場合，リアルの側に措かれるものは，一瞬に目の前を通過する新幹線とか，地面を這っているミミズとかである。新幹線やミミズが，包丁を使って肉を切るときの肉である。そして「速さ」が，包丁である。

6. 現前の「数」

(1)　自然数から四元数まで

数 $(N, +, \times)$ からは，量の普遍対象 ($(N, +), \times, (N, +, \times)$) が定義される。特に，数のいろいろ（自然数，整数，有理数，‥‥）に量のいろいろが応じることになる。こうして，量より先に数があることになり，「数」の意味 (定義) が問題になってくる。

「数」の意味を考えるために，実際にどんなものを「数」と呼んでいるかを，見ていこう。

現前の数 (系) は，四元数までの構築の流れが図Ａのようになっている。そしてこれらは, 量(系)を図Ｂに示すカテゴリー区分で対象化するものになっている。

$((\mathbb{N}, +), \times, (\mathbb{N}, +, \times))$ の離散と $((\mathbb{Q}^{+}, +), \times, (\mathbb{Q}^{+}, +, \times))$ の順序稠密の違いは，前者では２量で比をもてないものが出てくるのに対し，後者ではどの２量も比が一意的に定まるという違いとも，相応じている。

「大きさとｎ次元方向・完備」のカテゴリーの量 $((Q, +), \times, (N, +, \times))$ として数学の中で実際に対象にされるものは，図Ｃに示すｎ次元実ベクトル空間を母体とするものである。

$((\mathbb{R}, +), \times, (\mathbb{R}, +, \times))$ は,「量」と「線型空間」の両方の見方ができるものになる。

$((\mathbb{R}^2, +), \times, (\mathbb{C}, +, \times))$ と $((\mathbb{C}, +), \times, (\mathbb{C}, +, \times))$ の同型：$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ は，つぎの対応である：

$$(x, y) \longrightarrow x + yi$$

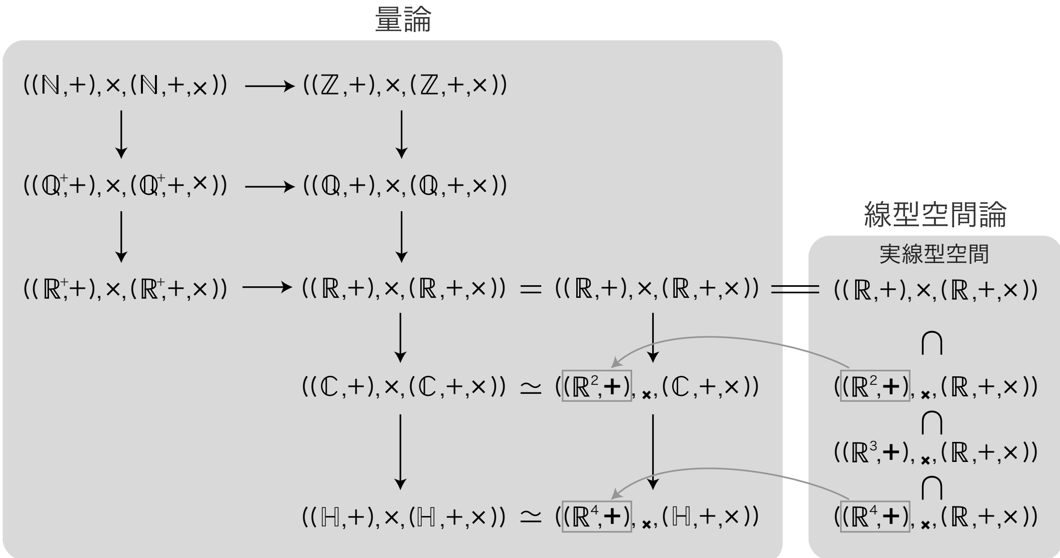
図Ａ　「数の拡張」

$$\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \\
 & & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
 & & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}$$

図Ｂ　「数の拡張」には量形式の拡張が対応

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^{+},+),\times,(\mathbb{Q}^{+},+,\times))$	$((\mathbb{R}^{+},+),\times,(\mathbb{R}^{+},+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$

図C　量論と線型空間論の交叉



２次元以上の数空間での**＋**(太字の＋)と**×**(太字の小さい×)は，数ベクトルの加法と数ベクトルに対する数の倍作用を表す。(その他＋, × は, 数の加法･乗法のまま。)

また，$((\mathbb{R}^4, \mathbf{+}), \mathbf{\times}, (\mathbb{H}, +, \times))$ と $((\mathbb{H}, +), \times, (\mathbb{H}, +, \times))$ の同型：$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}$ は，つぎの対応である：

$(x, y, z, w) \longrightarrow x + yi + zj + wk$

複素数の実用性は，つぎの点にある：

「２次元実ベクトルの＜比＞になる数」は，つくることができて，それは複素数である。

四元数の実用性は，つぎの点にある：

「３次元実ベクトルの＜比＞になる数」は，つくることができて，それは四元数である。

ただし，「３次元実ベクトルの＜比＞になる数」をつくるとき，それは「４次元実ベクトルの＜比＞になる数」をつくることになって，そしてその数は四元数だということになる。３次元実ベクトルは，４次元実ベクトル空間に埋め込むことで，四元数を＜比＞として用いられるようになる。

解説：二つの３次元実ベクトルに対しては，一方のベクトルを２重に回転して大きさを倍することで, 他方のベクトルに重ねることができる。さて，これが＜数の倍作用＞として表されるようなそんな数は，つくることができないか？
この数は実際につくることができる——ただし４次元実ベクトルに対し倍の作用をする数としてつくられることになる。これが四元数である。
３次元実ベクトルを４次元実ベクトル空間に埋め込み，これを四元数倍すると，結果は３次元実ベクトルになる。そして，＜２重に回転して大きさを倍する＞の結果と同じになる。倍の倍も, 四元数の積として計算できる。 よって,「*四元数が＜求めていた数＞である！*」となる。([宮下 ,2008c])

四元数になると，乗法が可換でなくなる。これは四元数の「数」としての著しい特徴になる。

(2)　四元数より後の数

四元数より後の「数」で現前のものは, 八元数, 十六元数となっている。

八元数は，四元数にケーリー＝ディクソンの構成法を適用してつくられ，四元数の拡張になる。四元数の拡張ということから，特に，乗法は可換でない。そして，この八元数になると，乗法が結

合的でなくなる。これは八元数の「数」としての著しい特徴になる。

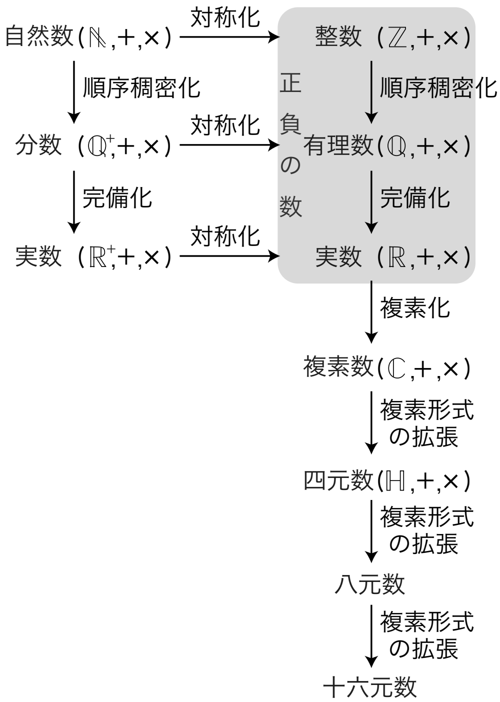
　十六元数は，八元数にケーリー＝ディクソンの構成法を適用してつくられる。そして，乗法は可換でなくそして結合的でない。

　ところで，数の道具性 (実際性) は,《量の対象化と量の表現・計算に使われる》というものである。そしてこの道具性の実現を「数」の条件にするとき，この条件には「乗法の結合性」が含まれてきた (§4,(2))。翻って，乗法が結合的でない数は，＜量をもたない数＞である。そして，八元数，十六元数は，＜量をもたない数＞だということになる。

7.「数」の意味

(1)「数」の意味のシフト

「数」と呼ばれているものを，自然数 → 整数 → 有理数 → 実数 → 複素数 → 四元数→ 八元数 → 十六元数 と追っていくと,「数」の意味として一貫して残るものが無くなる。どうしてこうなるかというと，新しい「数」をつくっていくやり方が,「直近の改造」だからである。隣り同士は似ているが, 隔たるにしたがい別物になっていく。



・自然数 → 分数 (有理数) は，順序稠密化。
・自然数 → 整数，分数 → 有理数 は，対称化 (「正負の数」化)。
・分数 → (正の) 実数，有理数 → 実数 は，完備化。(正の) 実数 → 実数 は，対称化。
・実数 → 複素数 は，倍作用の対象にしている実ベクトルの次元を 1 から 2 に上げるもの。また，形式的には，複素化 (「虚数単位」の導入)。
・複素数 → 四元数 は，倍作用の対象にしている実ベクトルの次元を 2 から 3 (結果的に 4) に上げるもの。また形式的には, 複素数の「複素」形式 (「虚数単位」の導入) の拡張。
・四元数 → 八元数 → 十六元数 は，純粋に「複素」形式の拡張。

また，これらのシフトは「数導入の方法論の複線化」として見ることもできる：

A. 方向をもつ量の概念を立て，方向を 1 次元 → 2 次元 → 3 次元 と上げようとすると，正負の数 → 複素数 → 四元数 が応じる。
B. 量の概念を 離散 → 順序稠密 → 完備 と拡張しようとすると，自然数 → 分数 → 実数 が応じる。
C. 実ベクトルを量にして，実ベクトルの次元を 1 次元 → 2 次元 → 3 次元 と上げようとすると，実数 → 複素数 → 四元数 が応じる。
D. 複素数の「複素」形式を拡張しようとすると，複素数 → 八元数 → 十六元数 が応じる。

(2)「数とは何か？」への答え

「数」の意味を自然数からはじまる現前の数で追っていくとき,「数」の意味として一貫して残るものが無くなる。すべてに通底する意味を取り出しても,「数」の意味といえるほどのものにならない。これは,「数」は形式のことばで定義するものにはならないということである。

　しかし一方,「*数とは何か？*」の問いが「*量に対するところの数の意味は？*」「*数と量の関係は？*」であるときは，＜数は量の比＞がこれの答えになる。(八元数・十六元数は，＜量をもたな

い数＞として，この問いに関わらない数ということになる。）

＜数は量の比＞の答えの内容になるものは,《量の対象化と量の表現・計算に使われる》ものとしての数の形式である。そしてこれは，つぎのものである：

・数は量の倍/比：$((Q, \mathbf{+}), {}_{\mathbf{\times}}, (N, +, \times))$

・「等倍」 $1 \in N$ の存在：

　$\mathbf{q} \in Q$ に対し $\mathbf{q}_{\mathbf{\times}} 1 = \mathbf{q}$

・「単位」 $\mathbf{u} \in Q$ の存在：

　$\mathbf{q} \in Q$ が $\mathbf{u}_{\mathbf{\times}} n$, $n \in N$ の形に一意表現

・$(\mathbf{q}_{\mathbf{\times}} m)_{\mathbf{\times}} n = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}} (m \times n)$

・$\mathbf{q}_{\mathbf{\times}} m \mathbf{+} \mathbf{q}_{\mathbf{\times}} n = \mathbf{q}_{\mathbf{\times}} (m + n)$

そして，これから導かれる数本体 $(N, +, \times)$ の形式は，特につぎのものである：

・単位元 1 の存在

・積に結合法則が成り立つ

・左分配法則が成り立つ

8. おわりに

本論考は，量に対する数の関係が＜数は量の比＞であることを，数と量の構造を示しつつ論じてきた。数と量の構造は異なるものとして区別され，そこで特に，＜数は量の抽象＞でない。

ただし，数の意味を 自然数 → 分数 → ‥‥ → 複素数 → 四元数 → 八元数 → 十六元数 のように追っていくとき，そこには意味のシフトや複線化があり，全体に通底する形式として数の定義になるようなものは，残らない。さらに，八元数・十六進数になると，これは＜量をもたない数＞ということになって，＜数は量の比＞でなくなる。

こうして，＜数は量の抽象＞とは決してならないが，＜数は量の比＞もすべての数に適うというものではない。

しかし，数の意味の問いが「*量に対するところの数の意味は？*」「*数と量の関係は？*」であるときは,＜数は量の比＞がこれに対する答えである。

最後に，実践に対し本論考をどのように位置づけているかを述べる。

学校数学の「数と量」は，これを回収する数学がある。そしてこの数学では，＜数は量の比＞である。一方, 学校数学は＜数は量の抽象＞であり，これは数学ではない。

数学でないものを数学の授業に乗せる無理は，生徒の「わからない」として現象する。このとき「無理」の認識がなければ,「わからない」を生徒や教員や指導法の問題にしてしまう。原因を捉え損ねた対策は, 問題の混迷を深めるばかりになる。

そこで「＜数は量の比＞への転換」の課題が立つことになる。しかし，これは現実的な課題になり得るのか？ 実際，＜数は量の抽象＞はいまは学校数学にすっかり定着している。

この課題は，課題として認識されるまでが長い行程になるのである。学校数学の＜数は量の抽象＞は＜数は量の比＞(「数」の数学) の視点を通して見えてくるのであるが，この視点の共通理解へと先ず進めて行かねばならない。実際，一定の共通理解がないところには，実践的アプローチも現実的なものにはならないわけである。生徒に「数と量」をどのように教えたらよいかの問題の前に，学校数学が「数と量」をどのような形でなら受け入れようとするかという問題がある。

本論考は，課題の困難をこのように認識しつつも,「数」の数学の共通理解形成を必要と見る立場から，＜数は量の比＞を論じた。

参考文献

宮下英明 (2008a) :「わり算」「割合」の概念整理, 日本数学教育学会誌（算数教育), vol.90 (4), 2008, pp.67-70.

――― (2008b) :「 1 と見る」の数学，日本数学教育学会誌（算数教育), vol.90 (12), 2008, pp.25-29.

――― (2008c) : 四元数 , http://m-ac.jp/meb/

――― (2009) : 量計算の数学 , 日本数学教育学会誌（算数教育), vol.91 (8), 2009, pp.31-36.

――― (2011) : 量計算の論理，http://m-ac.jp/meb/