量・数・量計算（Ⅰ）

宮 下 英 明

量の形式的な議論は，量の意味の形式化にまで踏み込まないと，数の構造に関する議論の単純なアナロジーになってしまう。本論文ではこの点に留意し，意味を射程に据えての量の形式的構成というものを考えてみる。

Ⅰ　量の範疇と構造

1－1　第1種量と第2種量

量は質の〈表現〉＝〈疎外〉の一方式であり，この〈疎外〉の理由は，質を量で代用しておくことが当面の目的にとって有効になるという一点にある。ところで，今日われわれの概念になる〝量〟の代表的なものを考察してみるとき，先ず二つの型の量が互いに区別されるものとして対象化される。

ひとつは，或るカテゴリーXの下に捉えられている質の任意の二つに対して，両者の〝差・隔り〟を新たな質として対象化し，これを表現するものである。

そして，この種の量の援用で，Xの要素になる質に返ってそれを表現するのが，もう一方の量である。即ち，一つの質 x_0 を〈基準〉として固定するとき，各質 x に対して x と基準の質 x_0 との差・隔りが第1種の量として表現されるわけであるが，この量を x そのものの表現と見直すことができる。これが，カテゴリーXの質に関しての第二の量である(註1)。言い回しの簡単のためと，また適切な用語が見当たらないことの理由から，はじめの量を第1種量，もう一方を第2種量と，それぞれ呼んでいくことにする。

〝Xに対する第1種量・第2種量〟としては，〝時間〟と〝時刻〟が一つの例になる。

第1種量は，或るカテゴリーの質の関係性が実体化されたものということになる。即ち，第1種量Qに対しては，質のカテゴリー（集合）Xと，積集合X×X上の一つの同値関係～が所与であり，(X×X)/～が集合としてのQになる。Qの要素としての量は，その同値関係による同値類に他ならない。先に，二つの質の〝差・隔り〟という言い方をしたが，質 x, x' に対する同値類 $[x, x']$ が，量として，x と x' の〝差・隔り〟と読まれるところのものである。(但し，$[x, x']$ が現実に〝差・隔り〟と読まれているということではない。)また，基準点を $x_0 \in$ Xにとった第2種量は，各 $x \in$ Xに対し $[x_0, x]$ を x の〝量〟$[x]$ として定めるものである。$[x]$ は，基準の質 x_0 に対する質 x の言わば〝位置〟の表現になっている。第1種量Qに対する第2種量，即ち $[x]$ $(x \in$ X$)$ 全体のつくる集合を，$\hat{Q}$ で表わすことにする。

ところで，言うまでもなく，Qを定義するX×X上の同値関係は，同値関係であれば何でもよいというのではなく，量を導く同値関係として幾つかの条件を満たしていなければならない。先ずはじめに，

(A1) $\{(x, x) \mid x \in \mathrm{X}\}$ は～に関する同値類，即ちQの元である．

が仮定される。これを0で表わし，$Q^* = Q - \{0\}$（0を除くQの元全体）とおくことにする。

例．〝速さ〟は第1種の量として定式化できるものである。この定式化の出発点は，時刻の集合Tと質点の運動が考えられることになる空間の点の集合Sとの積X＝T×Sであり，この集合Xの元 (t, p) が，運動質点の位相(phase)ということで一つのカテゴリーで捉えられていると

昭和59年9月17日受理

ころの〈質〉である。そして，〝速さ〟を導く $X \times X = (T \times S) \times (T \times S)$ 上の同値関係～が，つぎのように定義される：

(1) $t_1 \neq t_2$ のとき，$((t_1, p_1), (t_2, p_2)) \sim ((t_1', p_1'), (t_2', p_2'))$ は，$|t_1 - t_2| : |t_1' - t_2'| = d(p_1, p_2) : d(p_1', p_2')$ のこと；

(2) 任意の $t, t' \in T, p_1, p_2, p_1', p_2' \in S$ に対し，$((t, p_1), (t, p_2)) \sim ((t', p_1'), (t', p_2'))$.

(但し，$d(p, p')$ で $p, p' \in S$ の間の距離を表わすものとする。また，上式に見る異なるカテゴリーの量の比の相等の意味については，§2―1で論じることになる。）実際，同値類 $[(t_1, p_1), (t_2, p_2)]$ の各々が，個々の〝速さ〟を〈表現〉するものとなっている。($t_1 = t_2 = t$ の場合の $[(t, p_1), (t, p_2)]$ は，形式的に，∞ の速さと考える。)

第1種量・第2種量は，あくまでも，所与としての或る質のカテゴリーXに対する第1種量・第2種量という概念である。例えば，運動質点の〝速さ〟は時刻と空間の点の対 (t, p) を所与の質としたときの第1種の量であるが(註2)，運動質点の〝速さ〟自体をつぎに所与の質と考えれば，〝速さ〟の差としての第1種の量が考えられることになるし，更に，一つの〝速さ〟を基準として固定し質点の各〝速さ〟をこれに相対させるとき，第2種の量が得られることになる。

（註1）ここで筆者は，第2種量として，ベクトル量に対置される〝アフィン量〟([2])を想定している。

（註2）この場合の第2種の量はつぎのようになる。即ち，(t_0, p_0) を基準として固定するとき，各 (t, p) は〝速さ $v = [(t_0, p_0), (t, p)]$ の運動で到達できる時空点〟と把えられ，そして〝v〟がそれの量であるとされる。（もっとも，これは実際に使われている量ではないが。）

1―2　有向量（変化量）と対称量（間隔量）

所与の質――このカテゴリー（集合）をXで表わす――に対する第1種の量の場合，量 $[x, y]$ としては，x と y の〝間隔〟の表現であって x, y の順序が関係しないものと，x, y の順序が関係するものとの二通りが考えられる。前者のような量を，ここでは，意味を問題にする上では間隔量，形式を問題にする上では対称量(註1)と，それぞれ称することにする。即ち，

$(A2)_s$ 任意の $x, y \in X$ に対し，$[x, y] = [y, x]$.

となっている量が〝対称的（間隔的）〟ということである。

〝非対称的（非間隔的）〟ということでは，$(A2)_s$ の直接の逆（〝$[x, y] \neq [y, x]$ となる $x, y \in X$ がある〟）よりも，

$(A2)_0$ 任意の異なる $x, y \in X$ に対し，$[x, y] \neq [y, x]$.

という意味を寧ろ考えたい。というのも，非対称的（非間隔的）な量として実際に考えるのは，$[x, y] + [y, z] = [x, z]$ で定義される加法を備えているものであって――この加法は，$[x, y] + [y, x] = [x, x]$ の場合を考えればわかるように，実際，〝間隔的〟の意味とは相容れない――，この場合には，条件(A1)と加法に関するいくつかの仮定(§1―3，(1))のもとに，$(A2)_0$ が条件：

$(A2)_0'$　$a + a = 0 \Rightarrow a = 0$.

と同値になる。一般に，$(A2)_0'$ は通常考えている量の性質として自然なものであるから，$(A2)_s$ の直接の逆の代わりに $(A2)_0$ を以って，〝非対称的（非間隔的）〟の意味とすることができる。

また，上の加法を仮定したときには，$(A2)_0$ とは関係なく，

(1.2.1)　$[x, y] = [x, y'] \Rightarrow y = y'$.

が成立つ。$(A2)_0$ と(1.2.1)を合わせてみると，これは，量 $[x, y]$ が〝有向〟であることの意味になっている。

そこで，対称量（間隔量）に対する量としては，条件 $(A2)_0$ を満たす量を考えることにし（定義の限りでは，加法を問題にしない），これを，形式を問題にする上からは有向量，意味を問題にする上からは変化量――実際，$[x, y]$ は質 x

から質 y への変化量と読める——と，それぞれ称することにする。

例．前節で取り上げた〝速さ〟は対称量であるが，同値関係～を

$$((t_1, p_1), (t_2, p_2)) \sim ((t_1', p_1'), (t_2', p_2'))$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{p_1\ p_2} = \frac{t_1 - t_2}{t_1' - t_2'} \overrightarrow{p_1'\ p_2'}$$

のように変えれば，有向量（〝速度〟）になる。但し，$(t_1 - t_2)/(t_1' - t_2')\overrightarrow{p_1' p_2'}$ は，《時間 $t_1 - t_2$, $t_1' - t_2'$ の比の分だけ $\overrightarrow{p_1'\ p_2'}$ を倍する(§2—1)》と読むとする。

有向量と対称量は，上に述べたように，実際問題としては，第1種量のカテゴリーを二つに分割するサブ・カテゴリーとなっている。そしてさらに，この有向量と対称量のサブカテゴリーに，所謂〝ベクトル量〟がある(註2)。そこで，記法を拡張して，有向量の元としての同値類 $[x, y]$ を $\overrightarrow{x\ y}$ で表わすことにする。また，対称量の場合には，$\overline{x\ y}$ と書くことにする。

有向量と対称量いうここでの区分は一応形式的なものであって，実際，通常考えられている量としての対称量は有向量から導かれるものである。即ち，ベクトル量に準じて絶対値を考えることのできる有向量に対して，対称量が，$\overline{x\ x'} = |\overrightarrow{x\ x'}|$ として導出される。

なお，第1種量が有向量か対称量かで，それに応ずる第2種量も異なってくる。例えば，温度差を対称量として考えれば，これに応ずる第2種量——但し，温度 t_0 を基準にとる——は，t_0 との温度差が t 度の温度 $t_0 - t$ と $t_0 + t$ をともに〝t 度〟と表現するところのものである。

（註1）ここでは，〝対称量〟というコトバを，［3］で使われているのとは違った意味で用いている。

（註2）ここで有向量として考えていこうとするものは，所謂〝ベクトル量〟そのものではない。実際，§1—5，(1)で論じられる整有向量は，量の倍が自由には行なえないようなものである。また，〝ベクトル〟が〝スカラー〟に対置される概念であるのに対し，〝有向〟の概念はここでは〝対称〟に対置される。

1—3　有向量の構造

(1)　量の加法

Qを，質のカテゴリー（集合）Xに対するところの有向量とする。よって，X×X上の或る同値関係～に対する(X×X)/～が集合としてのQである。この同値関係～は，有向量の構造を導くものとして，$(A1), (A2)_0$ に加えてさらにいくつかの条件を満たしていなければならない。

有向量に対しては，$\overrightarrow{x\ y} + \overrightarrow{y\ z} = \overrightarrow{x\ z}$ で定義される加法＋を考えていく。ここで，$a+b$ がすべての $a, b \in Q$ に対して定義できるために，

$(A3)_0$ 任意の $a, b \in Q$ に対して，$a = \overrightarrow{x\ y}$, $b = \overrightarrow{y\ z}$ となる $x, y, z \in X$ が存在する.

が公理として必要になる。さらにこの加法を〝well-defined〟のものとするために，

$(A4)_0$ $\overrightarrow{x\ y} = \overrightarrow{x'\ y'}$ かつ $\overrightarrow{y\ z} = \overrightarrow{y'\ z'}$ ならば，$\overrightarrow{x\ z} = \overrightarrow{x'\ z'}$.

が公理となる。

この加法は結合法則を満たす。これをさらに，可換なものとしよう。そのためには，

$(A5)_0$ $\overrightarrow{x\ y} = \overrightarrow{x'\ y'} \Rightarrow \overrightarrow{x\ x'} = \overrightarrow{y\ y'}$

を公理としておけばよい。

$0 = \overrightarrow{x\ x}$ (§1−1, (A1)) は，この加法に関する零元である。

$\overrightarrow{x\ y}$ と $\overrightarrow{y\ x}$ は，加法に関して互いに他の逆元（対称元）である。したがって，各 $a \in Q$ は加法に関する逆元をもつ。これを $-a$ で表わそう。こうして，Qは加法に関する可換群の構造をもつことになる。

量の減法も，加法の逆算法としてここで導入しておこう。即ち，$a, b \in Q$ に対し $a-b$ は，$b+c=a$ なる $c \in Q$ として定義される。実際のところ，$a-b=a+(-b)$ である。

さて，Qの加法は，Qに対応する第2種量$\hat{Q}$につぎのような算法を導入する：

$$[x] + \overrightarrow{x\ y} = [y] \quad (x, y \in X).$$

基準点が x_0 のとき $[x] = \overrightarrow{x_0\ x}$, $[y] = \overrightarrow{x_0\ y}$ であ

るから，$[x]\in\hat{Q}$ に対する $\overrightarrow{xy}\in\hat{Q}$ の作用としての上の算法はQの加法そのものである。したがってまた，$p\in\hat{Q}$, a, $b\in Q$ に対し，$p+0=p$, $(p+a)+b=p+(a+b)$ である。

p, $q\in\hat{Q}$に対して$p-q$をQでの減法そのものとして定義しよう。これは $[y]-[x]=\overrightarrow{xy}$ の形になる。特に，$[x]+([y]-[x])=[y]$。

(2)　量の大小関係

先ず，X×X上の同値関係$\sim_0$で，X×Xの元(x, y)の方向——正の方向と負の方向——を同値関係～と両立する形で与えるものを考える。即ち，$\sim_0$によるX×Xの類別は，$\overrightarrow{xx}$ を同値類の一つとし，X×Xから$\overrightarrow{xx}$ を除いた残りを二つの部分P，Nに分割するものであって，かつ

$(A6)_0$　$\overrightarrow{xy}=\overrightarrow{x'y'}\Rightarrow(x, y)\sim_0(x', y')$.

が成立している。いま，同値類P, Nのそれぞれを正の方向，負の方向ということにする。つまり，$(x, y)\in X\times X$は，$\in P$のときに正の方向，$\in N$のときに負の方向，と規定される。また，(x, x) $(x\in X)$ に対しては，方向を持たないというように定める。

量$\overrightarrow{xy}$ は，(x, y) が正の方向であるときに>0（正あるいは符号が正），負の方向であるときに<0（負あるいは符号が負），ということにする。

Qの二量a, bに対する大小関係$a<b$を，$b-a>0$のこととして定義する。これは，ある正の量$c>0$に対し$a+c=b$, という意味である。以上の定義から，

任意のa, $b\in Q$に対し，$a>b$, $a=b$, $a<b$のいずれか一つ，かつ一つのみが成立つ.

が成立している。

(1. 3. 1)　a, b, $c\in Q$に対し，

$$a<b\Rightarrow a+c<b+c.$$

特に，$a<b$, $c<d$のとき$a+c<b+d$である。

量aと$-a$は，互いに異符号である。また，$a<b$ならば$-a>-b$である。

量の絶対値の概念を，ここで導入しておこう。即ち，$a\in Q$に対しaと$-a$のうち負でない方をaを絶対値と呼び，$|a|$で表わすことにする。

1－4　1次元量

(1)　量の比（倍）

ここでは，第1種量Qで，$Q^*\times Q^*$上につぎの条件を満たす同値関係～(X×X上の同値関係を表わす記号〝～〟を流用する）が与えられているようなものを考える：

(R1)　$(a, b)\sim(a, c)\Rightarrow b=c$.

この公理が，われわれの知っている量の比を形式的に得るための第一歩である。

$(a, b)\in Q^*\times Q^*$の属する同値類を$a\backslash b$——〝aに対するbの比〟と読む——で表わし，商集合$(Q^*\times Q^*)/\sim$を$\mathscr{R}(Q^*)$で表わす。$\mathscr{R}(Q^*)$の元は，Q^*上の(二項)関係（のグラフ）と見なせる。

さらに，各$\alpha\in\mathscr{R}(Q^*)$に対しQ上の（二項）関係$\bar{\alpha}$を

$$\begin{cases}\bar{\alpha}\mid Q^*=\alpha\\ \bar{\alpha}\ (0)=0\end{cases}$$

で定義し，αが$\mathscr{R}(Q^*)$を動くときの$\bar{\alpha}$全体と$0\in Q$への定値関数$0: a\mapsto 0\ (a\in Q)$（のグラフ）からなる集合を，$\mathscr{R}(Q)$で表わすとしよう。但し，$\alpha=a\backslash b$ $(a, b\in Q^*)$のとき$\bar{\alpha}$も$a\backslash b$で表わすこととし，また，$a\in Q^*$, $0\in Q$に対する$a\backslash 0$を定値関数0として定義することで，比$a\backslash b$を$(a, b)\in Q^*\times Q$に対するものへと拡張する(註)。したがって，$\mathscr{R}(Q)=\{a\backslash b\mid(a, b)\in Q^*\times Q\}$である。

$a\in Q$と$\alpha\in\mathscr{R}(Q)$に対し，$(a, b)\in\alpha$となる$b\in Q$が存在すればそれは(R1)より一意である。このとき，$a\cdot\alpha$をbのこととして定義し，〝aのα倍〟と読むことにする。実際，われわれの知っている〝倍〟を，ここでは想定しているのである。

$\alpha\in\mathscr{R}(Q)$に対する〝比α〟と〝α倍〟の二つの見方は，つぎの関係でつながっている：

$$a\cdot\alpha=b\Leftrightarrow\alpha=a\backslash b\quad(a\in Q^*,\ b\in Q).$$

この関係は，また，$a\in Q$に対する$\alpha\in\mathscr{R}(Q)$の作

用としての$a\cdot\alpha$が推移的であることを示している。特に，任意に固定した$u\in Q^*$（〝単位量〟）に対し任意の$a\in Q$が——$a=u\cdot(u\backslash a)$ということで——uの倍の形に書ける。そこで，公理(R1)を満たす第1種量Qのことを，1次元量と称することにする。

（註）比の慣習的な書き方は〝$a:b$〟であり，また$a:b$に対しては$b\neq 0$を前提として$a:b=a/b$と解釈するのも慣習である。他方，いまの場合のように，$a:b$を(a,b)を代表元とするQ上の（二項）関係のグラフ$[a,b]$として見ていこうとするとき，$\neq 0$が仮定されるのはaの方である。そこで，〝$[a,b]$〟におけるa,bの前後の順序と〝b/a〟におけるa,bの上下の順序を変えない比の記法ということで，ここでは〝$a\backslash b$〟を用いることにした。

(2)　有理量と整量

1次元量Qに対する条件として，つぎのものを考えてみる：

$(R2)_R$ 任意の$a,\ b,\ c\in Q^*$に対し，$a\backslash b=c\backslash d$となるような$d\in Q^*$が存在する.

これは，所謂〝比例式の第4項の存在公理〟にあたるが，これを仮定した場合のQを有理量と呼ぶことにする。

有理量Qの場合では，$\mathscr{R}(Q)-\{0\}$の元の各々がQの変換（Qのそれ自身の上への1対1写像）のグラフになっていることが結論される。特に，$a\cdot\alpha$ ($a\in Q$, $\alpha\in\mathscr{R}(Q)$)は$\alpha(a)$のこととして，任意のa,αに対して定義される。なお，$a\cdot\alpha$に対する〝aのα倍〟という読みに準じて，$\mathscr{R}(Q)$に属するQの変換のことをQの倍変換と称することにする。

有理量でない1次元量Qで，つぎの条件を満たすものを整量と呼ぶことにする：

$(R2)_I$ 任意の$a,\ b,\ c,\ d\in Q^*$に対し

$$a\backslash b=a'\backslash b',\ c\backslash d=b'\backslash d'$$

となるような$a',\ b',\ d'\in Q^*$が存在する。

以下，〝1次元量〟ということでは有理量と整量を考える。

なお，有理量Qに対応する第2種量$\hat{Q}$に対し，$p\in\hat{Q}$に対する$\alpha\in\mathscr{R}(Q)$の作用$p\cdot\alpha$を，Qの元としてのpに対するαの倍作用として定義する。即ち，$[x]\cdot\alpha=\overrightarrow{x_0\ x}\cdot\alpha$である。

(3)　比（倍）の乗法

(1)では比（倍）の概念を導入したが，〝倍の倍は倍〟ということで，$\alpha,\ \beta\in\mathscr{R}(Q)$に対するそれの積$\alpha\beta\in\mathscr{R}(Q)$を定義するとしよう。これは，$\alpha=a\backslash b,\ \beta=b\backslash c$に対し$\alpha\beta=a\backslash c$とおき，また$\alpha=0$のときには$\alpha\beta=0$とするということで，定義される。($(R2)_R$あるいは$(R2)_I$より，任意の$\alpha,\ \beta\in\mathscr{R}(Q)$について$\alpha=a\backslash b,\ \beta=b\backslash c$というように書くことができる。)但し，定義を〝well-defined〟とするために，つぎの公理が必要になる：

(R3) $a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c'\in Q^*$に対し，

$$a\backslash b=a'\backslash b' \text{かつ} b\backslash c=b'\backslash c' \Rightarrow a\backslash c=a'\backslash c'.$$

なお，この積から定義される$\mathscr{R}(Q)$の乗法：$(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\beta$は，明らかに結合法則を満たす。

また，われわれの知っている〝倍〟は，α倍してβ倍するのとβ倍してα倍するのとが同じ結果になるようなものである。そこでつぎの（同値な）条件を公理として措く：

(R4) $a,\ a',\ b,\ b'\in Q^*$に対し，

$$a\backslash b=a'\backslash b' \Rightarrow a\backslash a'=b\backslash b'.$$

(R4)′ $\alpha,\ \beta\in\mathscr{R}(Q^*)$に対し，$\alpha\beta=\beta\alpha$.

こうして，$\mathscr{R}(Q)$において可換な乗法$\alpha\beta$が定義された。

いま，

(R5) $\{(a,a)\mid a\in Q^*\}$は$\sim$に関する同値類.

(R6) $a,\ b,\ c,\ d\in Q^*$に対し，

$$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow (b,a)\sim(d,c).$$

を公理として措こう。

(R5)は，Qの恒等変換——以下ιで表わす——が$\mathscr{R}(Q)$に属するということである。したがって，ιは$\mathscr{R}(Q)$の乗法に関する単位元となる。また，(R6)より，各$\alpha\in\mathscr{R}(Q)-\{0\}$に対し

その逆$\alpha^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in\alpha\}$も$\mathscr{R}$(Q)—{0}に属するが，これは乗法に関する$\alpha$の逆元となる。特に，$\mathscr{R}$(Q)—{0}は乗法に関して（可換）群である。

(R6)と$(R2)_R$から，

$(1,4,1)_R$ 任意の$a,b,d\in Q^*$に対し，$a\diagdown b=c\diagdown d$となる$c\in Q^*$が存在する．

が導かれる。また，(R6)と$(R2)_I$から，整量Qに関するつぎの性質（〝通分〞の可能性）が導かれる：

$(1,4,1)_I$ 任意のa，b，c，$d\in Q^*$に対し，$a\diagdown b=a'\diagdown b'$，$c\diagdown d=a'\diagdown d'$となる$a'$，$b'$，$d'\in Q^*$が存在する。

なお，有理量Qに対する$\mathscr{R}$(Q)の乗法は，（Q上の関係の一特殊である）関数：Q→Qの合成のことになる。したがってこの場合，(R3)は，

$(R3)_R$ $\alpha,\beta\in\mathscr{R}(Q^*)$に対し$\beta\circ\alpha\in\mathscr{R}(Q^*)$.

と同値である。しかし，整量Qにおいては，積$\alpha\beta$は一般にQ上の関係β，αの合成$\beta\circ\alpha$とは一致しない[註]。

また，有理量Qの場合，(R4)はつぎのように表現できる：

$(R4)_R$ $a,a'\in Q^*$，$\alpha\in\mathscr{R}(Q^*)$に対し，$a\diagdown a'=a\cdot\alpha\diagdown a'\cdot\alpha$.

(註)整数環$\boldsymbol{Z}$は整有向量として捉え直すことができ，整数の比$b:a=b/a(a\neq 0)$がここでの$a\diagdown b$に当たるのであるが(§1—5,(1))，例えば，$2\diagdown 1=\{(0,0),(\pm2,\pm1),(\pm4,\pm2),\cdots\cdots\}$と$3\diagdown 2=\{(0,0),(\pm3,\pm2),(\pm6,\pm4),\cdots\cdots\}$の合成は$\{(0,0),(\pm6,\pm2),(\pm12,\pm4),\cdots\cdots\}$であり，積$(2\diagdown1)(3\diagdown2)=3\diagdown1=\{(0,0),(\pm3,\pm1),(\pm6,\pm2),\cdots\cdots\}$とは一致しない。

1—5　1次元有向量

有向量に対し導入される量の加法と1次元量に対し導入される量の比（倍）は，1次元有向量において出会うことになる。本節では，この1次元有向量を考察の対象に取り上げる。

先ず，整有向量を規定してしまうことから始めよう。

(1)　整有向量

〝整有向量〞ということでは，つぎのような形で規定される1次元有向量Qを，以下，専ら考えていくことにする。先ず，集合としてのQは，或る無限集合Sの有限部分集合全体の集合Tをその上の同値関係$\sim_T$：

$$A\sim_T B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A\text{とBは対等}$$

で割った商集合$X=T/\sim_T$と，X×X上の同値関係～：

$$([A],[A'])\sim([B],[B'])\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A+B'\text{（直和）と}A'+B\text{（直和）は対等}$$

に対する，$Q=(X\times X)/\sim$である。

このとき，Qにおいて公理(A1)，$(A2)_0$(§1—1，1—2)が満たされる。即ち，Qは有向量である。

さらに公理$(A3)_0$，$(A4)_0$，$(A5)_0$も満たされる。この結果，Q上の可換な加法が，$\overrightarrow{xy}+\overrightarrow{yz}=\overrightarrow{xz}$ $(x,y,z\in X)$の定義で与えられることになる。

いま，$p\in S$に対して$\bar{1}=\overrightarrow{[\phi]\,[\{p\}]}$（$\phi$はSの空部分集合）とおこう。$\overline{-1}$を$\bar{1}$の対称元とすると，Qは，

$$\cdots\cdots,\ \overline{-1}+\overline{-1},\ \overline{-1},\ 0,\ \bar{1},\ \bar{1}+\bar{1},\ \bar{1}+\bar{1}+\bar{1},\cdots\cdots$$

から成る集合である。$\bar{1}$のn個の和としてのQの元を$\bar{n}$で表わし，$\bar{n}$の対称元$-\bar{n}$を$\overline{-n}$で表わすことにする。

つぎに，Qにおける量の比（倍）を，$Q^*\times Q^*$上の間値関係～を

$$(\bar{j},\bar{j'})\sim(\bar{k},\bar{k'})\Leftrightarrow jk'=j'k$$

と定める[註]ことによって，定義する。この同値関係は確かに(R1)(§1—4)を満たしている。

ここで定義された比（倍）に関しては$(R2)_R$は成立たないが，$(R2)_I$が成立つ。つまり，Qは整量である。

さらに，(R3)，(R4)，(R5)，(R6)もQにおいて

満たされている。

また，整有向量Qにおける量の大小の順序関係であるが，先ず，$(\overline{m}, \overline{n})$の方向を，$m<n$のとき正，$m>n$のとき負，というように定める。このとき，$(A6)_0$が満たされる。

整有向量Qの量（要素）は，

$$\cdots\cdots<\overline{-2}<\overline{-1}<\overline{0}=0<\overline{1}<\overline{2}<\overline{3}<\cdots\cdots$$

のように順序<に関して整列する。特に，各nについて$\overline{n}<a<\overline{n+1}$となる$a\in$Qは存在しない。即ち，量Qは離散的である。

なお，整有向量Qに対応する第2種量としては，Xの基準点に0＝[ϕ]をとるものを考えよう。したがって，n個の元からなるA⊂Sに対する[A]には，$\overline{n}\in$Qが第2種量として当てられることになる。そしてこのときの第2種量は，

$$0<\overline{1}<\overline{2}<\overline{3}<\cdots\cdots$$

である。

もしSが〝α〞という名称で呼ばれるもののカテゴリーであれば，この量は《〝α〞がn個》という量(e. g. 〝りんご〞がn個，n〝日〞，〝ひも〞がn本)である。

(註) 第5章では量からの数の導出が論じられることになるが，ここで既に用いられている整数およびその計算は，目下展開している理論に対してのメタ言語という身分のものである。

(2) 比（倍）の加法

1次元有向量Qに対する$\mathscr{R}$(Q)に，加法を導入しよう。即ち，任意の$\alpha, \beta\in\mathscr{R}$(Q)は$(1,4,1)_R$，$(1,4,1)_I$より$\alpha=a\backslash b, \beta=a\backslash c$の(〝同分母〞の)形に書けるが，このとき$\alpha+\beta=a\backslash(b+c)$と定める。ただここで，$\alpha+\beta\in\mathscr{R}$(Q)を保証しなければならない。そこで，条件：

(R7) $a, a'\in$Q＊，$b, b', c, c'\in$Qに対し，$a\backslash b=a'\backslash b'$かつ$a\backslash c=a'\backslash c'$のとき$a\backslash(b+c)=a'\backslash(b'+c')$.

を公理として措く。

$\mathscr{R}$(Q)のこの加法は，結合・交換法則を満たす。また，$0\in\mathscr{R}$(Q)はこの加法に関する零元である。

つぎに，$\mathscr{R}$(Q)のすべての元が加法に関して逆元（対称元）をもつようにしよう。$\alpha=a\backslash b$に対し$a\backslash(-b)$がαの逆元でなければならないから，つぎの条件が公理として必要になる：

(R8) $a, a', b, b'\in$Q＊に対し，

$$a\backslash b=a'\backslash b' \Rightarrow a\backslash(-b)=a'\backslash(-b').$$

これは，これまでの公理の下で，

(R8)′ $a, b\in$Q＊に対し，$(-a)\backslash(-b)=a\backslash b$.

と同値である。特に，$(-a)\backslash b=a\backslash(-b)=-(a\backslash b)$。また，

(1.5.1) $\alpha, \beta\in\mathscr{R}$(Q)に対し，$\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$.

が成立つ。

加法の逆算法の減法も，ここで導入しておく。即ち，$\alpha, \beta\in\mathscr{R}$(Q)に対し$\alpha-\beta$は，$\beta+\gamma=\alpha$なる$\gamma\in\mathscr{R}$(Q)として定義される。実際，$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$である。

有理有向量Qの場合，$\alpha, \beta\in\mathscr{R}$(Q)の和$\alpha+\beta$は，関数としての$\alpha, \beta$の和：$a\longmapsto\alpha(a)+\beta(a)=a\cdot\alpha+a\cdot\beta$のことである。よって，(R7)はこの場合，

(R7)′ $\alpha, \beta\in\mathscr{R}$(Q)に対し，関数：$a\longmapsto a\cdot\alpha+a\cdot\beta$ $(a\in$Q$)$は$\mathscr{R}$(Q)に属する.

と同値である。また，$\alpha\in\mathscr{R}$(Q)の対称元$-\alpha$は，関数：$a\longmapsto-(a\cdot\alpha)$ $(a\in$Q$)$であり，したがって(R8)は，

(R8)′ $\alpha\in\mathscr{R}$(Q)に対し，関数：$a\longmapsto-(a\cdot\alpha)$ $(a\in$Q$)$は$\mathscr{R}$(Q)に属する.

のことになる。

整有向量Qにおいて(R7), (R8)は成立している。なお，$\mathscr{R}$(Q)の和$\alpha+\beta$は，一般に$\{(a, a\cdot\alpha+a\cdot\beta) \mid a\in \mathrm{pr}_1(\alpha)\cap\mathrm{pr}_1(\beta)\}$とは異なる($\mathrm{pr}_1$は，射影：Q×Q′⟶Q)(註)。

(註)整数環$\boldsymbol{Z}$は整有向量の普遍対象として捉え直すことができる(§1－5，(1))。これについて，$\alpha, \beta=2\backslash1=\{(0,0), (\pm2, \pm1), (\pm4, \pm2), \cdots\cdots\}$(複号同順；以下同じ)とすると，関係としての$\alpha, \beta$の和は$\{(0,0), (\pm2, \pm2), (\pm4, \pm4), \cdots\cdots\}$であって，$2\backslash1+2\backslash1=$

$1\setminus 1=\{(0,0),(\pm 1,\pm 1),(\pm 2,\pm 2),\cdots\cdots\}$
とは異なる。

(3)　倍作用，比（倍）の加法・乗法の関係

1次元有向量Qに対する比（倍）については，つぎのことが成立つ：

(1.5.2)　$\alpha=a\setminus b=c\setminus d$ かつ $a+c\neq 0$ のとき，$\alpha=(a+c)\setminus(b+d)$.

Qが有理量の場合，(1.5.2) は

$(1,5,2)_R$　$a, b\in Q$, $\alpha\in\mathscr{R}(Q)$ に対し，$(a+b)\cdot\alpha=a\cdot\alpha+b\cdot\alpha$.

と言い換えられる。また$(1,5,2)_R$から

$(1,5,3)_R$　$a\in Q$, $\alpha\in\mathscr{R}(Q)$ に対して

$$(-a)\cdot\alpha=-(a\cdot\alpha)\ (=a\cdot(-\alpha)).$$

が導かれる。

Qが有理量のときには，また，

$(1,5,4)_R$　任意の $a\in Q$, $\alpha, \beta\in\mathscr{R}(Q)$ に対し

$$(a\cdot\alpha)\cdot\beta=a\cdot(\alpha\beta)$$

である。Qが整量ならば，これは，

$(1,5,4)_I$　$a\in Q$，α，$\beta\in\mathscr{R}(Q)$ に対し，$a\in \mathrm{pr}_1(\alpha)$ かつ $a\cdot\alpha\in\mathrm{pr}_1(\beta)$ ならば，$(a\cdot\alpha)\cdot\beta=a\cdot(\alpha\beta)$.

に替わる。

1次元有向量Qに対する $\mathscr{R}(Q)$ の乗法と加法については，分配法則：

(1,5,5)　$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

が成立つ。乗法に関しては $\mathscr{R}(Q)-\{0\}$ が可換群であったから，この分配法則によって，$\mathscr{R}(Q)$ の体であることが結論される。

ここで，第2種量のことについて触れておく。われわれの生活の中では，Qと$\hat{Q}$は同じ名称の下で混同されて用いられている。例えば，Q，$\hat{Q}$として〝速度〟を考えてみよう。生活の中で〝速度〟と言うとき，それは通常〝運動物体の速度〟のことであるが，この場合の〝速度〟は$\hat{Q}$である。但し，対応するXは，同一方向に等速度運動をする質点のカテゴリーであり，x，$y\in X$に対する$\overrightarrow{xy}$は，xに対するyの相対速度である。したがって，物体Aの速度 v と物体Bの速度 w に対して $v+w$ を考えることには意味がない(註)。しかし，$v-w$ や，通常の言い回しの〝w は v の α 倍〟ということには，§1—3,(1), §1—4,(1)で定義した算法として，意味をつけることができる。(但し，二つの運動質点の速度の比が基準速度のとり方に完全に依存するものであることに，注意しよう。)

(註) 速度 v の物体A上を（v に対する相対）速度 w で同一方向に運動する物体Bの速度を $v+w$ で求める場合，$v+w$ の身分は $v\in\hat{Q}$ に対する $w\in Q$ の作用である。

(4)　比（倍）の大小関係

加法に次いで，大小関係を比（倍）に対して導入しよう。先ず，比（倍）に関する正負をつぎのように定める。即ち，同符号の a, $b\in Q$ に対する比 $a\setminus b$ は正（>0，あるいは符号が正），異符号の a, b に対する $a\setminus b$ は負（<0，あるいは，符号が負）であるとする。これが〝well-defined〟であるためには，

(R9)　$a\setminus b=a'\setminus b'$ で a，b が同符号なら a'，b' も同符号である．

が成立していなければならない。そこで，これを公理として措く。

乗法の単位元ιは>0である。また，

(1,5,6)　α，$\beta\in\mathscr{R}(Q)$ が同符号のとき $\alpha\beta>0$，異符号のとき $\alpha\beta<0$．

(1,5,7)　$a\setminus b=a'\setminus b'>0$ のとき，$a<a'\Leftrightarrow b<b'$；$a\setminus b=a'\setminus b'<0$ のとき，$a<a'\Leftrightarrow b>b'$.

が成立つ。

このとき，量の比（倍）$\alpha,\beta\in\mathscr{R}(Q)$ の大小関係 $\alpha<\beta$を，つぎの（同値な）条件によって定義する：

$(1,5,8)^1$　$\beta-\alpha>0$.

$(1,5,8)^2$　$\alpha-\beta<0$.

$(1,5,8)^3$　ある正の量 $a\in Q$ に対し，$a\cdot\alpha<a\cdot\beta$.

$(1,5,8)^4$　ある負の量$a\in Q$に対し，$a\cdot\alpha>a\cdot\beta$.

$(1,5,8)^5$　$\mathrm{pr}_1(\alpha)\cap\mathrm{pr}_1(\beta)$ に属するすべての正の量 a に対し，$a\cdot\alpha<a\cdot\beta$.

$(1,5,8)^6$　$\mathrm{pr}_1(\alpha)\cap\mathrm{pr}_1(\beta)$ に属するすべての負の量 a に対し，$a\cdot\alpha>a\cdot\beta$.

つぎのことが成立つ：

(1, 5, 9)　$\alpha,\beta,\gamma\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ に対し，$\alpha<\beta$ ならば $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

(1, 5, 10)　$\alpha,\beta,\gamma\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ に対し，$\alpha<\beta$ のとき，$\gamma>0$ ならば $\alpha\gamma<\beta\gamma$，$\gamma<0$ ならば $\alpha\gamma>\beta\gamma$.

有理有向量Qの場合には，正の量 $u\in\mathrm{Q}$ を固定するとき，$a\in\mathrm{Q}$ の符号及び a, $b\in\mathrm{Q}$ の大小関係 $a<b$ と，倍 $u\backslash a$ の符号及び倍 $u\backslash a$ と $u\backslash b$ の大小関係 $u\backslash a<u\backslash b$ とがそれぞれ対応する。また，このことから，比（倍）について定義したくが実際に順序の公理を満たすこともわかる。

さらに，有理有向量Qが，任意の量 $a<b$ に対し $a<c<b$ なる量 c がとれるという意味で，稠密であることが結論される。c を得るには，先ず，$a<b$ から導かれる大小関係 $a+a<a+b<b+b$ の各項を任意の正の量 u に対する $u+u$ で割って，比の大小関係 $(u+u)\backslash(a+a)<(u+u)\backslash(a+b)<(u+u)\backslash(b+b)$ を得る。ここで $(u+u)\backslash(a+b)=u\backslash c$ のように c をとればよい。

比（倍）の絶対値の概念もここで導入しておく。即ち，$\alpha\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ に対し α と $-\alpha$ のうち負でない方を α の絶対値と定め，$|\alpha|$ で表わす。

1－6　多次元有向量

一般の有向量では，要素の二量の比を考えることはできない。しかし，ベクトル量を想定して，非1次元有向量Qとしては，特に，つぎのような部分族 $\{\mathrm{Q}_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ の合併の形をしているものを考える。即ち，Q_i は互いに同型な有理有向量で，異なる i, $j\in\mathrm{I}$ に対して $\mathrm{Q}_i\cap\mathrm{Q}_j=\{0\}$。

いま，有理有向量 Q_0 を任意に一つ固定し，各 $i\in\mathrm{I}$ につき同型 $f_i:\mathrm{Q}_i\to\mathrm{Q}_0$ $(i\in\mathrm{I})$ をとる。そして，$a\in\mathrm{Q}$ に対する $\alpha\in\mathscr{R}(\mathrm{Q}_0)$ の（倍）作用 $a\cdot\alpha$ をつぎのように定義する。即ち，$a\in\mathrm{Q}_i$ のとき，$a\cdot\alpha=f_i^{-1}(f_i(a)\cdot\alpha)$ (註)。

同型 f_i $(i\in\mathrm{I})$ については，つぎのことを仮定する：

(1. 6. 1) a, $b\in\mathrm{Q}$, $\alpha\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ に対し，

$$a+b\in\mathrm{Q}_i\Rightarrow a\cdot\alpha+b\cdot\alpha\in\mathrm{Q}_i.$$

(1. 6. 2) $a\in\mathrm{Q}_i$, $b\in\mathrm{Q}_j$, $a+b\in\mathrm{Q}_k$ のとき，

$$f_k(a+b)=f_i(a)+f_j(b).$$

このとき，以下のことが成立つ：任意の a, $b\in\mathrm{Q}$, $\alpha,\beta\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ に対し，(1) $(a+b)\cdot\alpha=a\cdot\alpha+b\cdot\alpha$，(2) $a\cdot(\alpha\beta)=(a\cdot\alpha)\cdot\beta$，(3) $a\cdot(\alpha+\beta)=a\cdot\alpha+a\cdot\beta$，(4) $a\cdot 1=a$（1は $\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ の乗法の単位元）。$\mathscr{R}(\mathrm{Q})=\mathscr{R}(\mathrm{Q}_0)$ は体で（§1—5），Qは加法に関して可換群であるから（§1—3, (1)），以上の性質はQが体 $\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ 上のベクトル空間であることを意味している。このことを考慮して，以上述べてきた構造を有する有向量Qのことを多次元有向量と称し，$\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ 上のベクトル空間としてのQの次元を，量Qの次元ということにする。有理有向量は1次元の多次元有向量である。

なお，$u_i\in\mathrm{Q}_i(i\in\mathrm{J}$；JはIの有限部分) がQの基底になるとき，Qはベクトル空間 $\mathrm{Q}_i(i\in\mathrm{J})$ の積としての量 $\mathrm{Q}'=\prod_{i\in\mathrm{J}}\mathrm{Q}_i$ と同型になる。

つぎに，量の絶対値の概念を導入しよう。即ち，量 $a\in\mathrm{Q}$ の絶対値 $|a|$ を，$a\in\mathrm{Q}_i$ のときに $|a|=|f_i(a)|\in\mathrm{Q}_0$ とすることで，定義する。また，絶対値の加法 $|a|+|b|$ 及び倍 $|a|\cdot\alpha$ を，Q_0 における加法及び倍として定める。

絶対値については，(1) $|0|=0$，(2) $|a|>0$ $(a\in\mathrm{Q}^*)$，(3) $|-a|=|a|$ $(a\in\mathrm{Q})$ が明らかに成立っているが，さらに，

(1. 6. 3) a, $b\in\mathrm{Q}$ に対し，$|a|+|b|\geqq|a+b|$

が成立つ。

$\alpha\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ の絶対値——即ち，α, $-\alpha\in\mathscr{R}(\mathrm{Q}_0)$ のうち負でない方——を $|\alpha|$ で表わそう。このとき，

(1. 6. 4) $a\in\mathrm{Q}$, $\alpha\in\mathscr{R}(\mathrm{Q})$ に対し，

$$|a\cdot\alpha|=|a|\cdot|\alpha|.$$

(註) $i \neq j$ のとき$\mathscr{R}(Q_i)$の元をQ_jの元に直接作用させることはできない。しかし$\mathscr{R}(Q_i)$と$\mathscr{R}(Q_j)$は同型でつながっているから，この同型を介して$\mathscr{R}(Q_i)$の元をQ_jの元に作用させることが考えられる。こうして結局は，Qの元全体に作用する倍というものを考えることが出来るのであるが，問題はどのようなスタイルにするかである。本論文では，別に有理有向量Q_0をとって，倍作用をそこで処理し，そして元に戻す，というやり方をとった。

1－7　量認識の形式

ここまでは，量の形式的な導出についてのみ論じ，量認識の形式ということには触れてこなかった。量が多種多様なものとして現出するのは，量認識の形式という観点を導入することによってである。

量認識の形式の問題には，量を担う実体の問題と，認識対象の記号変換の問題とがある。というのは，量を考えようとする対象そのものは，量を直接担う実体ではないからである[註1]。或る対象において或る量が考えられることになるのは，量を担う存在へとこの対象が記号変換された上でのことである。例えば，〝身長〟は，〝身体〟が線分あるいは二点へと記号変換された上で，線分の長さあるいは二点の隔りとして測られるものである。

視覚的な〝長さ〟，〝広さ〟，〝大きさ〟を表現している量の〝長さ〟，〝面積〟，〝体積〟を担う実体は，それぞれ，幾何学の対象の線分，平面図形，立体図形である。糸の長さ，グランドの広さ（面積），木片の大きさ（体積）は，それぞれ，実在ではなく記号的存在の線分の長さ，平面図形の面積，立体図形の体積として測られる。実際，糸の長さを測る場合，糸の両端をある力を以って引っ張るわけであるが，この力の大きさ加減で糸の長さも変わってくる。つまり，糸に固有の長さというものがあるわけではなく，引っ張って伸ばした糸を線分という記号的存在へと恣意的に置き換え，これの長さを以って糸の長さとしているに過ぎない。また，グランドの広さの計測では面の凸凹は無視されるし[註2]，木片の大きさの計量では，木片の中の隙間というものは考慮されない（つまり，きっちりつぶすとどれ程の大きさかというような見方はとられない。）

量をそこに考えようとする対象とその量を担う存在とを区別することは量の議論では本質的な筈であるが，このことは余り認識されていないようである。

(註1) 量に代数的構造を考えたりできるのも，このためである。

(註2) 凸凹を考慮した線，面は，〝フラクタル(fractal)〟なる概念で数学の対象になっている。これの長さ，面積は無限大である。

II　量　と　数

この章では，量として1次元有向量のみを考える。

2－1　量からの数の導出

1次元有向量の構造を規定するものは，加法＋と大小関係＜，そして量の比（倍）である。したがって，1次元有向量Q, Q′に対する同型とは，双射$f: Q \to Q'$でつぎの条件を満たすもののことである：

(2.1.1) $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$;

(2.1.2) $f(a+b)=f(a)+f(b)$;

(2.1.3) $a \setminus b = c \setminus d \Rightarrow f(a) \setminus f(b) = f(c) \setminus f(d)$.

但し (2.1.1) は条件 (2.1.2) の下で

(2.1.1)′ $a>0 \Rightarrow f(a)>0$

と同値である。また，(2.1.3) は，

(2.1.3)′ $\alpha \in \mathscr{R}(Q) \Rightarrow (f \times f)(\alpha) \in \mathscr{R}(Q')$.

(2.1.3)″ $c \in \mathrm{pr}_1(a \setminus b)$ のとき，$f(c) \in \mathrm{pr}_1(f(a) \setminus f(b))$ かつ$f(c \cdot (a \setminus b)) = f(c) \cdot (f(a) \setminus f(b))$.

のようにも書ける。

量の比（倍）に関する構造は，量に対する倍と，$\mathscr{R}(Q)$における乗法・加法・大小関係＜の構

造であった。そして同型 $f: Q \rightleftarrows Q'$ に対し, $\bar{f}$: $\alpha \mapsto (f\times f)(\alpha)$ $(\alpha\in\mathscr{R}(Q))$ は $\mathscr{R}(Q)$ の $\mathscr{R}(Q')$ の上への同型となる。

さて, 同型な量 Q, Q', ……に対しては $\mathscr{R}(Q)$, $\mathscr{R}(Q')$, ……はこのように同型であるから, これらを形式的に一本化することが可能になる。そして実際, このことをしたときに, (量Q, Q', …のそれぞれに対しこれの倍作用の意味をもつところの) 数 $\mathscr{N}$ が得られることになる。$\mathscr{R}(Q)$ の**普遍モデル（普遍対象）**というのが, このときの**数 $\mathscr{N}$ の身分である**。

例. 整有向量 Q (§1—5, (1)) に対する $\mathscr{R}(Q)$ の**普遍モデル**としての数は, 有理数 $\boldsymbol{Q}$ である。実際, $m\backslash n \mapsto \bar{m}\backslash\bar{n}$ (m, n は整数) が $\boldsymbol{Q}$ の $\mathscr{R}(Q)$ の上への同型になる。

2—2　量としての数

数 $\mathscr{N}$ には, 乗法と加法及び大小関係による構造が考えられているわけであるが, $\mathscr{N}$ の乗法を $\mathscr{N}$ のそれ自身への倍作用と読み直すとき, 以下に示すように, $\mathscr{N}$ は有理有向量の構造を有することになる。

先ず, 質のカテゴリー（集合）X として $\mathscr{N}$ 自身をとり, $\mathscr{N}\times\mathscr{N}$ 上の同値関係〜を

$$(\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta') \Leftrightarrow \beta-\alpha=\beta'-\alpha' \quad (\Leftrightarrow \alpha+\beta'=\alpha'+\beta)$$

で定義する。〜に関しては, (A1), $(A2)_0$, $(A3)_0$, $(A4)_0$, $(A5)_0$ が満たされている。

つぎに, $(\alpha,\beta)\in\mathscr{N}\times\mathscr{N}$ の方向を, $\alpha<\beta$ のとき正, $\alpha>\beta$ のとき負, と定める。$(A6)_0$ はこの定義に対して満たされる。

そして, 比(倍)を定める $\mathscr{N}^*\times\mathscr{N}^*$ (但し $\mathscr{N}^*=\mathscr{N}-\{0\}$) 上の同値関係〜を,

$$(\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta')\Leftrightarrow \alpha^{-1}\beta=\alpha'^{-1}\beta' \quad (\Leftrightarrow \alpha\beta'=\alpha'\beta)$$

で定義する。これに対しては, (R1), $(R2)_R$, そして (R3) から (R9) までが, 確かに満たされる。

以上のように構成された有理有向量 $\mathscr{N}$ を $\hat{\mathscr{N}}$ で表わし, 1次元有向量 Q に対する $\mathscr{R}(Q)$ の普遍モデルとしての $\mathscr{N}$ とこれの判別がつくようにしておこう。(但し, 第3章から以降はこのように区別して書くことはせず, $\hat{\mathscr{N}}$ に対しても表記 $\mathscr{N}$ を流用する。)

つぎが成立つ：

(2.2.1) a, b, $c\in Q^*$, $d\in Q$ に対し,

$$(a\backslash b)\backslash(c\backslash d)=(a\backslash c)\backslash(b\backslash d).$$

Q は写像：$a\mapsto u\backslash a$　(u は Q^* の固定した元) によって $\hat{\mathscr{N}}$ に埋め込まれる。即ち, $\hat{\mathscr{N}}$ は Q の拡大である。しかし, $\mathscr{R}(\hat{\mathscr{N}})$ は $\mathscr{N}=\mathscr{R}(Q)$ と同型である。実際, $\alpha\mapsto 1\backslash\alpha$ が $\mathscr{N}$ の $\mathscr{R}(\hat{\mathscr{N}})$ の上への同型になる——但し, 1を $\mathscr{N}$ の乗法に関する単位元とする。また, $\alpha\backslash\beta\mapsto\alpha^{-1}\beta$ がこれの逆同型である。この証明にはつぎの（同値な）結果が用いられる：

(2.2.2) α, $\gamma\in\mathscr{N}-\{0\}$, $\beta\in\mathscr{N}$ に対し, $\alpha\backslash\beta=(\alpha\gamma)\backslash(\beta\gamma)$.

(2.2.2)' α, $\alpha'\in\mathscr{N}-\{0\}$, β, $\beta'\in\mathscr{N}$ に対し,

$$\alpha\backslash\beta=\alpha'\backslash\beta' \Leftrightarrow \alpha^{-1}\beta=\alpha'^{-1}\beta' \quad (\Leftrightarrow \alpha\beta'=\alpha'\beta).$$

このとき,

(2.2.3) u, $a\in Q^*$, $b\in Q$ に対し,

$$a\backslash b=(u\backslash a)\backslash(u\backslash b).$$

が成立つ。但し, ここでは $a\backslash b\in\mathscr{R}(Q)=\mathscr{N}$, $(u\backslash a)\backslash(u\backslash b)\in\mathscr{R}(\hat{\mathscr{N}})=\mathscr{N}$ と見る。

Q が有理有向量のときには, 先の埋め込み：$a\mapsto u\backslash a$ は Q の $\hat{\mathscr{N}}$ の上への同型になる。

例. 整有向量 Q に対する $\mathscr{R}(Q)$ は有理数 $\boldsymbol{Q}$ であるが, 逆に, 整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ に $\hat{\boldsymbol{Q}}$ の構造の制限を考えれば, $\boldsymbol{Z}$ は Q に同型となる。この場合の $\boldsymbol{Z}$ を $\hat{\boldsymbol{Z}}$ で表わそう。即ち, 整有向量としての $\boldsymbol{Z}$ が $\hat{\boldsymbol{Z}}$ である。$\hat{\boldsymbol{Z}}$ は, 整有向量の普遍モデルと見なせる。

さて, $\hat{\boldsymbol{Z}}$ のこの特徴づけから, $\mathscr{R}(\hat{\boldsymbol{Z}})=\boldsymbol{Q}$。また, 上に述べた $\mathscr{R}(\hat{\mathscr{N}})=\mathscr{N}$ の特別な場合として, $\mathscr{R}(\hat{\boldsymbol{Q}})=\boldsymbol{Q}$ である。

加法と乗法および大小関係の構造が考えられる $\boldsymbol{Z}$ の方は, つぎのようにして得られる。即ち, $\hat{\boldsymbol{Z}}$ に対しての $\mathscr{R}(\hat{\boldsymbol{Z}})=\boldsymbol{Q}$ の元による倍を, $\boldsymbol{Z}$ の元による倍に制限して考える。これは $\boldsymbol{Z}$ のそれ自身に対する倍であるが, それを $\boldsymbol{Z}$ の乗法とし

て読み替えれば，$\boldsymbol{Z}$ は所期のものとなる。

2－3　数　直　線

本節では，数直線の構成とその意味について論じる。

先ず，質のカテゴリー（集合）のXとして直線をとる。ここで，直線Xの各点を質と考えるのである。量Qを定めるX×X上の同値関係～は，通常の意味のベクトルを定義するものであって，即ち，$(x, y)\sim(x', y')$ を《(x,y) と (x', y') の方向が同じで，x と y の距離と x' と y' の距離が同じ》のこととする。Qは有向距離のカテゴリーである。そしてこれは有理有向量である(註1)。

つぎに，$x_0\in X$ を基準点にとって，Qから第2種量を導く。即ち，各 $x\in X$ において，$\overrightarrow{x_0x}\in Q$ がそれに付随する量として考えられることになる。言い換えると，各 $x\in X$ に $\overrightarrow{x_0x}$ が x の指標として目盛られたわけであるが，このように考えた直線Xを，ここでは一応，有向距離直線と称しておく。

数直線は，この有向距離直線からつぎのようにして得られる。即ち，x_0 と異なる $x_1\in X$ を固定して，各 $x\in X$ に $\overrightarrow{x_0x}/\overrightarrow{x_0x_1}\in\mathscr{R}(Q)=\mathscr{N}$ を目盛るのである。x_1 を固定するとは単位量として $u=\overrightarrow{x_0x_1}$ をとるということであり，量 $\overrightarrow{x_0x}$ が単位量の α 倍のときに x に〝α〟を目盛るのが数直線なのである(註2)。また，このときもし x に〝$u\cdot\alpha$〟を目盛れば，有向距離を測る――u が単位目盛の――モノサシとしての有向距離直線が得られる。

さて，数直線を媒介にすれば，有向距離の量Qに同型な任意の量Q′――このような量のことを，1次元実有向量と呼ぶことにする――に対して，それの言わば〝量直線〟が得られる。即ち，Q′が質のカテゴリー（集合）X′に対応する量である場合には，異なる $x_0', x_1'\in X'$ を任意に固定して，数直線の各目盛 $\alpha\in\mathscr{N}=\mathscr{R}(Q')$ を $\overrightarrow{x_0'x_1'}\cdot\alpha\in Q'$ に置き換えていくのである(註3)。こうして，質的には幾何学的形象一般と何の関係もない量が，直線の形で表現されることになる。

この量直線の意義は，言うまでもなく，量の比（倍）が視覚的に捉えられるという道具性にある。

有向距離の量Qに対する $\mathscr{N}=\mathscr{R}(Q)$ は実数 $\boldsymbol{R}$ であり，$\hat{\boldsymbol{R}}$ はQに同型である。したがって，数直線は量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ に対する量直線としても把えられる。はじめの意味での数直線をX，量直線としての数直線を $\hat{X}$ で表わそう。Xと $\hat{X}$ は見掛けは同じであるが，X上の目盛りは $\boldsymbol{R}$ の元で，$\hat{X}$ はXの目盛り $\alpha\in\boldsymbol{R}$ を量としての $\alpha\in\hat{\boldsymbol{R}}$ に置き換えたものという，意味的な違いがある。

（註1）逆に，有向距離の量Qはこのようなものとして理想化されているわけである。

（註2）特にこの結果，数が大小の順序に関して直線上に整列することにもなる（§1―5，(4)）。

（註3）量直線における目盛の間隔の任意性は，数直線における目盛の間隔の任意性に基づき，後者は，x_0 に対する $x_1\in X$ のとり方の任意性に基づいている。

III　量の準同型

3－1　比例関係（関数）

(1)　比例関係（関数）の概念

異なる量（カテゴリー）の間の関係で，われわれの意識・思考の対象となることが多く，また実際重要であるものは，二つの1次元有向量の間の比例関係である。ここで比例関係とは，これまでの概念を用いて言えば，$\mathscr{R}(Q)\subset\mathscr{R}(Q')\subset\mathscr{N}$ なる1次元有向量Q, Q′の積Q×Q′の部分集合 f で，$\mathrm{pr}_1(f)\cap Q^*\neq\phi$ かつつぎの条件を満たすもののことである：

(3. 1. 1) $(0, 0)\in f$.

(3. 1. 2) $(0, a')\in f$ ならば $a'=0$.

(3. 1. 3) $(a, 0)\in f$ なる $a\in Q^*$ が存在すれば，

$f = Q \times \{0\}$.

(3.1.4)　$(a, a') \in f \cap (Q^* \times Q'^*)$ のとき，$(b, b') \in Q^* \times Q'$ に対し，

$$(b, b') \in f \Leftrightarrow a \backslash b = a' \backslash b'.$$

1次元有向量 Q と Q′ の間の比例関係全体の集合を $\mathscr{R}(Q, Q')$ で表わすことにする。

先の条件によって，比例関係 f に対しては，それに属する $Q^* \times Q'$ の元 (a, a') を1つ指定すれば，$Q \times Q'$ の各元についてそれが f に属するか否かを判定することができる。そこで，$(a, a') \in f \cap (Q^* \times Q')$ のとき，f を $a \backslash a'$ で表わすことにする。また，$a \backslash 0$ を 0 と書く。(3.1.4) から

(3.1.4)′ $a, b, a' \in Q^*$, $b' \in Q$ に対し，

$$a \backslash a' = b \backslash b' \Leftrightarrow a \backslash b = a' \backslash b'.$$

つぎが成立つ：

(3.1.5)　$(a, a'), (a, b') \in f \Rightarrow a' = b'$.

そこで，$(a, a') \in f$ のときの a' を，$a \cdot f$ で表わす。

さらに以下のことが成立つ：

(3.1.6)　$a \in \mathrm{pr}_1(f)$ のとき $-a \in \mathrm{pr}_1(f)$ で，かつ $(-a) \cdot f = -(a \cdot f)$.

(3.1.7)　$a, b \in \mathrm{pr}_1(f)$ のとき $a + b \in \mathrm{pr}_1(f)$ で，かつ $(a+b) \cdot f = a \cdot f + b \cdot f$.

(3.1.8)　$a \in Q$, $\alpha \in \mathscr{R}(Q) (\subset \mathscr{R}(Q'))$ に対し $(a \cdot \alpha) \cdot f$, $a \cdot f$ が定義されれば，$(a \cdot f) \cdot \alpha$ も定義され，かつ $(a \cdot \alpha) \cdot f = (a \cdot f) \cdot \alpha$.

関数 $f : Q \to Q'$ でつぎの条件を満たすもののことを，比例関数と呼ぶことにする：

(3.1.8)′ $a \in Q$, $\alpha \in \mathscr{R}(Q)$ に対し，$a \cdot \alpha$ が定義されれば $(a \cdot f) \cdot \alpha$ も定義され，かつこのとき

$$(a \cdot \alpha) \cdot f = (a \cdot f) \cdot \alpha.$$

但し，$a \in Q$ に対する $f(a)$ を $a \cdot f$ の形に書くものとする。比例関数とは，実際，比例関係であってかつ関数であるもののことである。

有理有向量の代数的構造は，加法と倍作用によるものである。いま，有理有向量 Q, Q′ に対し，両者の代数的構造に関する準同型：$Q \to Q'$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}(Q, Q')$ で表わすことにする。このとき，$\mathrm{Hom}(Q, Q') = \mathscr{R}(Q, Q')$ である。言い換えると，比例関数：$Q \to Q'$ が，準同型のことである。

なお，$Q = Q'$ の場合の $\mathscr{R}(Q, Q)$ ($= \mathrm{Hom}(Q, Q) = \mathrm{End}(Q)$) は，$\mathscr{R}(Q)$ と一致する。実際，$a \backslash b \in \mathscr{R}(Q, Q)$ と $a \backslash b \in \mathscr{R}(Q)$ は同じものである。

さて，1次元有向量 Q, Q′ はそれぞれ $\mathscr{R}(Q)$, $\mathscr{R}(Q')$ に埋め込める。そしてこのとき，各 $f \in \mathscr{R}(Q, Q')$ は或る $\bar{f} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{R}(Q), \mathscr{R}(Q'))$ の中に埋め込まれる。詳しく言うと，任意に固定した $u \in Q^*$, $u' \in Q'^*$ に対し，$u^{-1} : a \mapsto u \backslash a$, $u'^{-1} : a' \mapsto u' \backslash a'$ は，それぞれ，量としての $\mathscr{R}(Q)$, $\mathscr{R}(Q')$ (§2—2) の中への Q, Q′ の埋め込みである。そして，$u^{-1} \times u'^{-1}$ によって $f = a \backslash a'$ は $\bar{f} = (u \backslash a) \backslash (u' \backslash a') \in \mathrm{Hom}(\mathscr{R}(Q), \mathscr{R}(Q'))$ の中に埋め込まれる。実際，

(3.1.9.)　$u, a, b \in Q^*$, $u' \in Q'^*$, $a', b' \in Q'$ に対し，

$$a \backslash a' = b \backslash b'$$
$$\Leftrightarrow (u \backslash a) \backslash (u' \backslash a') = (u \backslash b) \backslash (u' \backslash b').$$

が成立つ。

比例関数：$\mathscr{R}(Q) \to \mathscr{R}(Q')$ とは，$\mathscr{R}(Q')$ の元による倍関数のことである――実際，比例関数 $\alpha \backslash \alpha'$ は $\alpha^{-1}\alpha'$ による倍関数であり，$\alpha' \in \mathscr{R}(Q')$ による倍関数は比例関数 $\alpha \backslash (\alpha\alpha')$ $(\alpha \in \mathscr{R}(Q))$ である。特に，$f = a \backslash a' \in \mathrm{Hom}(Q, Q')$ に対する $\bar{f} = (u \backslash a) \backslash (u' \backslash a') \in \mathrm{Hom}(\mathscr{R}(Q), \mathscr{R}(Q'))$ は，$\alpha_0 = (u \backslash a)^{-1}(u' \backslash a') \in \mathscr{R}(Q')$ による倍関数である。

ここで，$\alpha_0 = (u \backslash a)^{-1}(u' \backslash a')$ の "\" を形式的に除法と見なせば $(u \backslash a)^{-1}(u' \backslash a') = (u \backslash u')^{-1}(a \backslash a') = (u \backslash u')^{-1} f$ となるから，α_0 を $(u \backslash u')^{-1} f$ と書くことにする。なお次節では，この形式的な表現に意味が与えられることになる。

$(u^{-1} \times u'^{-1})(f)$ は，一般に $\bar{f}$ と一致しない。しかし，Q, Q′ が有理有向量の場合――このとき $\mathscr{R}(Q, Q') = \mathrm{Hom}(Q, Q')$ であり，かつ u^{-1} は Q の $\mathscr{R}(Q)$（量）の上への同型，u'^{-1} は Q′ の $\mathscr{R}(Q')$（量）の上への同型となる (§2—2)――には，$(u^{-1} \times u'^{-1})(f)$ は $\bar{f}$ と一致する。そして，$f \mapsto \bar{f}$ は，$\mathrm{Hom}(Q, Q')$ の $\mathrm{Hom}(\mathscr{R}(Q), \mathscr{R}(Q'))$ の上への双射となる――実際，$f \in \mathrm{Hom}(Q, Q')$ に対し，$\bar{f}$ は，つぎの図式を可換にする準同型 $\in \mathrm{Hom}(\mathscr{R}(Q),$

$\mathscr{R}(Q'))$ として特徴づけられる：

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr\downarrow u^{-1}"'] & Q' \arrow[d, "\wr\downarrow u'^{-1}"] \\ \mathscr{R}(Q) \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathscr{R}(Q') \end{tikzcd}$$

特に，つぎが成立つ：

(3. 1. 10) $f\in \mathrm{Hom}(Q, Q')$ に対し，$f=u\backslash(u'\cdot(u\backslash u')^{-1}f)$；言い換えると，$u\cdot f=u'\cdot(u\backslash u')^{-1}f$，また $(u\backslash u')^{-1}f=u'\backslash u\cdot f$.

また，$(u\backslash u')^{-1}:f\mapsto (u\backslash u')^{-1}f$ は，$\mathrm{Hom}(Q, Q')$ の $\mathscr{R}(Q')$ の上への双射で，逆関数は $\alpha'\mapsto u\backslash(u'\cdot\alpha')$ である。

つぎに，Q, Q' が１次元実有向量（§2―3）である場合を考える。このとき，量としての $\mathscr{R}(Q)$, $\mathscr{R}(Q')$ は，量直線の表現をもつ。この量直線をそれぞれL, L′ で表わすとしよう。

さて，L と L′ を両者の原点（指標が０の点）において直交させると，L, L′ が座標軸の座標平面が得られる。そしてこのとき，各 $f\in\mathrm{Hom}(Q, Q')$（のグラフ）は，座標平面上に，原点 (0, 0) を通る直線として表現されることになる。詳しく言うと，量直線 L，L′ を作る際に或る $u\in Q^*$, $u'\in Q'^*$ を単位量として固定したわけであるが，これに対して同型 $u^{-1}:Q\to\mathscr{R}(Q)=\boldsymbol{R}$, $u'^{-1}:Q'\to\mathscr{R}(Q')=\boldsymbol{R}$ が導かれる。そして $f\in\mathrm{Hom}(Q, Q')$ に対する $\bar{f}=(u^{-1}\times u^{-1})(f)\in\mathrm{Hom}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ が，或る $\alpha_0\in\boldsymbol{R}$ に対する比例関数：$\alpha\mapsto\alpha\cdot\alpha_0$ ということで，座標平面上の原点を通る直線で表現される。但し，座標 (α, α') は，ここでは量 $u\cdot\alpha\in Q$ と $u'\cdot\alpha'\in Q'$ の対と読まれる。

(2)　比例関数としての量

Q, Q' を有理有向量で $\mathscr{R}(Q)\subset\mathscr{R}(Q')=\mathscr{N}$ なるものとし，$u\in Q^*$, $u'\in Q'^*$ を固定する。

$\alpha'\mapsto u\backslash(u'\cdot\alpha')$ は $\mathscr{R}(Q')$ の $\mathrm{Hom}(Q, Q')$ の上への双射であるから（§3―1），これによって $\mathscr{R}(Q')$ の量としての構造を $\mathrm{Hom}(Q, Q')$ にうつし，$\mathrm{Hom}(Q, Q')$ を量化することが考えられる。

量としての $\mathrm{Hom}(Q, Q')$ では，加法は $f=u\backslash(u'\cdot\alpha')$ と $g=u\backslash(u'\cdot\beta')$ に対し $f+g=u\backslash(u'\cdot(\alpha'+\beta'))$ と定義されるものであり，$f\neq 0$ のときの比（倍）$f\backslash g=(u\backslash(u'\cdot\alpha'))\backslash(u\backslash(u'\cdot\beta'))$ は $\alpha'\backslash\beta'\in\mathscr{N}$，そして，$\gamma'\in\mathscr{N}$ による倍 $f\cdot\gamma'$ は $u\backslash(u'\cdot(\beta'\gamma'))$ である。加法に関する零元０は $u\backslash(u'\cdot 0)=u\backslash 0$。

量 $\mathrm{Hom}(Q, Q')$ の単位量として $u\backslash u'$ をとるとしよう。（単位 $u\backslash u'$ は，“km/h”, “N/m²” のような形をした“単位”の実体的解釈となるものである。）$u\backslash u'$ に対しては同型 $(u\backslash u')^{-1}:\mathrm{Hom}(Q, Q')\to\mathscr{N}$ が定まるが，これは，いままでに考えてきた $(u\backslash u')^{-1}$ と同じものである。実際，

(3. 1. 11) $f\in\mathrm{Hom}(Q, Q')$ に対し，

$$(u\backslash u')\backslash f=u'\backslash(u\cdot f).$$

（但し，$(u\backslash u')\backslash f\in\mathscr{R}(\mathrm{Hom}(Q, Q'))$ と $u'\backslash(u\cdot f)\in\mathscr{R}(Q')$ を，$\mathscr{N}$ の元として読む。）前節から $(u\backslash u')^{-1}$ の記号を用いてきたのは，このためである。

3―2　線型写像

(1)　行列

Q, Q' をそれぞれ m 次元，u 次元の有向量とする（§1―6)。したがって，つぎのような有理有向量 $Q_i\subset Q(i=1,\cdots, m)$, $Q'_j\subset Q'(j=1,\cdots, n)$ がとれる。即ち，$u_i\in Q_i{}^*(i=1,\cdots, m)$, $u_j'\in Q_j'{}^*(j=1,\cdots, n)$ を任意にとるとき，u_i は Q を生成し，u_j' は Q' を生成する；また Q_i は，α が $\mathscr{R}(Q)$ を動くときの $u_i\cdot\alpha$ の全体で，Q_j' は α' が $\mathscr{R}(Q')$ を動くときの $u_j'\cdot\alpha'$ の全体。ここで，$\mathscr{R}(Q)\subset\mathscr{R}(Q')=\mathscr{N}$ としておく。

Q, Q' の代数的構造はベクトル空間の構造であるから（§1―6)，準同型：$Q\to Q'$ は線型写像である。これは，Q, Q' が１次元のときは比例関数であるが（§3―1,(1))，そうでない場合には，比例関数の組として規定されることになる。即ち，線型写像 $f:Q\to Q'$ は，比例関数 $f_{ij}:Q_i\to Q_j'(i=1,\cdots\cdots,m\,;\,j=1,\cdots\cdots,n)$ が構成する行列 $(f_{ij})_{i,j}$ の $(a_1\cdots\cdots a_m)\in Q$ に対する作用：

$$(a_1\cdots\cdots a_m)\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=(\sum_{k=1}^{m} a_k\cdot f_{k1}\cdots\cdots\sum_{k=1}^{m} a_k\cdot f_{kn})$$

として表わせる。(但し$(a_1\cdots\cdots a_m)\epsilon \mathrm{Q}$は，$a_i\epsilon \mathrm{Q}_i$ $(i=1,\cdots,m)$に対する$\sum_{k=1}^{m} a_i$と読む。$(a_1'\cdots a_n')\epsilon \mathrm{Q}'$のように書いたときも同様。)

いま，$u_i\epsilon \mathrm{Q}_i^*(i=1,\cdots,m)$, $u_j'\epsilon \mathrm{Q}_j'^*(j=1,\cdots,n)$を固定し，$\alpha_{ij}=(u_i\backslash u_j')^{-1}f_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$とおく。即ち，$\alpha_{ij}$は，$f_{ij}=u_i\backslash(u_j'\cdot\alpha)$とする$\alpha\epsilon\mathscr{R}(\mathrm{Q}')=\mathscr{N}$のことである(§3—1, (1))。

このとき，$a=(u_1\cdot\xi_1\cdots\cdots u_m\cdot\xi_m)\epsilon \mathrm{Q}$ $(\xi_i\epsilon\mathscr{R}(\mathrm{Q})\subset\mathscr{N})$に対する$f(a)=(u_1'\cdot\xi_1'\cdots\cdots u_n'\cdot\xi_n')\epsilon \mathrm{Q}'$ $(\xi_j'\epsilon\mathscr{R}(\mathrm{Q}')\subset\mathscr{N})$が，つぎのような$\mathscr{N}$の上の計算で求まる：

$$(\xi_1'\cdots\cdots\xi_n')=(\xi_1\cdots\cdots\xi_m)\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=(\sum_{k=1}^{m}\xi_k\alpha_{k1}\cdots\cdots\sum_{k=1}^{m}\xi_k\alpha_{kn})$$

(2)　表としての行列

〝行列〞の把え方（意味）については，線型写像とともに表が挙げられるのが通例である。では，表とは何か——何で**ある**べ**き**か。これについてはっきりさせておく必要がある。実際，線型写像（の表現）としての行列も〝表〞であるには違いないのだから。

線型写像ではない行列が**現実**にどのようなものであるかを見てみると，それは，量としての一次元線型空間$\mathrm{Q}_i(i=1,\ \cdots,\ m)$から構成される積空間

$$\left.\begin{matrix}(\mathrm{Q}_1\times\cdots\cdots\times\mathrm{Q}_m)\\ \times \\ \vdots \\ \times \\ (\mathrm{Q}_1\times\cdots\cdots\times\mathrm{Q}_m)\end{matrix}\right\}n\text{コ}$$

の元である。この積空間の一般的な形は

$$\begin{matrix}(\mathrm{Q}_{11}\times\cdots\cdots\times\mathrm{Q}_{1m})\\ \times \\ (\mathrm{Q}_{21}\times\cdots\cdots\times\mathrm{Q}_{2m})\\ \times \\ \vdots \\ \times \\ (\mathrm{Q}_{l1}\times\cdots\cdots\times\mathrm{Q}_{lm})\end{matrix}$$

であるが，いまの場合$\mathrm{Q}_{i1}=\mathrm{Q}_{i2}=\cdots\cdots=\mathrm{Q}_{il}(i=1,\cdots\cdots,m)$となっているというのが，ここで注意すべき点である。実際，このような行列は，意味を吟味するならば，一個の標本の記述に相当する行ベクトルが標本数分だけタテに並んだものと見るべきなのである。したがって，この行列がいくつの列から成っているかということは——標本記述のためにいくつの次元を用意しているかということであるから——本質的であるが，行の数は——標本数ということで——本質的ではない。つまり，この種の行列は，意味上は，相互に独立（＝無関係）な（行）ベクトルの単純な束であり，したがってベクトルに還元できてしまうものなのである。われわれは，このような行列を〝表としての行列〞と称することにしよう。

表としての行列に対し，線型写像としての行列は積空間

$$\begin{matrix}(\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_1')\times\cdots\cdots\times\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_n'))\\ \times \\ \vdots \\ \times \\ (\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_m,\mathrm{Q}_1')\times\cdots\cdots\times\mathrm{Hom}(\mathrm{Q}_m,\mathrm{Q}_n'))\end{matrix}$$

の元であり，よってそれの列ベクトルの身分は個々に異なってくる。例えば，このような行列から行ベクトルを一つ(j行としよう)除くことは，この行列で〈表現〉される線型写像に更に射影：$\mathrm{Q}_1'\times\cdots\times\mathrm{Q}_n'\to\mathrm{Q}_1'\times\cdots\times\mathrm{Q}'_{j-1}\times\mathrm{Q}'_{j+1}\times\cdots\times\mathrm{Q}_n'$を合成することの意味になるから，それは行列の変質をもたらすところのものであ

る。ところが，表としての行列の場合には，このことは標本を一つ除くことの意味であるから，行列の変質というところ迄には至らない。

線型写像としての行列と表としての行列の違いは，行列の〝積〟というものを考えるときにもはっきりしてくる。先ず，表同士の積は定義されない(意味をもたない)。これに対し，線型写像としての行列については，線型写像の合成に対応するものとして積が定義されることになる。行列の積としてはもう一つ，表Aと線型写像fの積

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l1}\cdots\cdots a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & \vdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & \vdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}\cdot f_{k1}\cdots\cdots \sum_k a_{1k}\cdot f_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_k a_{lk}\cdot f_{k1}\cdots\cdots \sum_k a_{lk}\cdot f_{kn} \end{pmatrix}$$

がある。いま行列Aの行ベクトルを $a_i(i=1,\cdots,l)$ と書けば，右辺の行列の行ベクトルは $f\cdot a_i\ (i=1,\cdots,l)$ である。したがって積 $A\cdot f$ は，$a_i\cdot f\ (i=1,\cdots,l)$ の計算を独立に行なってそれを単に束ねているに過ぎないわけである。表が行列として本質的なものでないことが，この点でも明かになる。

IV　量の（テンソル）積

4－1　量の（テルソル）積の概念

Q, Q′ を同型な1次元有向量とする。Q, Q′ が有理有向量のときは $\mathscr{R}$(Q) と $\mathscr{R}$(Q′) を同型を介して $\mathscr{R}(Q)=\mathscr{R}(Q')=\mathscr{N}$ と見ることにし，Q, Q′ が整有向量のときは $\mathscr{N}=\boldsymbol{Z}$ として，テンソル積 $Q\otimes_{\mathscr{N}}Q'$ を考えることができる。

$Q\otimes Q'$ に対しては，Q, Q′ と同型な1次元有向量としての解釈を与えることができる。即ち，質のカテゴリー(集合) X として $Q\times Q'$ を考え，$X\times X=(Q\times Q')\times(Q\times Q')$ 上の同値関係～を，

$$((a,\ b'),\ (b,\ b'))\sim((c,\ c'),\ (d,\ d'))$$
$$\Leftrightarrow b\otimes b'-a\otimes a'=d\otimes d'-c\otimes c'$$
$$(Q\otimes Q' \text{ において})$$

で定義する。ここで $\bar{Q}=(X\times X')/\sim$ として1次元有向量が実際に得られるのであるが，$\bar{Q}$ と $Q\otimes Q'$ は，両者の代数的構造に関する同型：$\overrightarrow{(a,\ a')(b,\ b')}\mapsto b\otimes b'-a\otimes a'$（逆同型は，$a\otimes a'\mapsto\overrightarrow{(0,\ 0,)(a,\ a')}$）でつながっている。そこで，これによって $Q\otimes Q'$ に量の解釈を与えることにする。

さらに，Q, Q′ が有理有向量のときは任意に固定した $u'\in Q'^*$ に対し，また Q, Q′ が整有向量のときは $u'=\bar{1}$ (§1—5,(1)) に対し，$a\mapsto a\otimes u'$ がQの $Q\otimes Q'$ の上への同型になる――逆同型は $a\otimes a'\mapsto a\cdot(u'\backslash a')$ である。なお，$a\otimes a'<b\otimes b'$ は $a\backslash b>b'\backslash a'$ のことになる。

例.（i）有向長さ――長さの増減を表現する量――のカテゴリーQに対するテルソル積 $Q\otimes_R Q$ は，有向面積――面積の増減を表現する量――のカテゴリーである。実際，$Q\otimes Q$ の元 $a\otimes b$ は，タテの長さ a，ヨコの長さ b の長方形の面積分の増減 (a, b が同符号であれば増加，異符号であれば減少）の解釈が与えられる。

（ii）方陣の形に並んでいるモノ――或るカテゴリーCの下に捉えられている対象（例えば〝リンゴ〟としてのモノ）――の個数は，«Cの対象の個数» のカテゴリーとしての量Q（離散量）に対するテルソル積 $Q\otimes_Z Q$ である。これの解釈の仕方は（i）に準ずる。

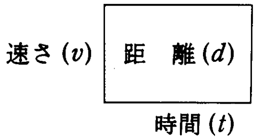
4－2　量の積の〝面積図〟

量の線分図表現や，量の積の面積図表現は，量に対する〈了解〉図式として一般的であり，実際，算数・数学教育の現場では頻繁に用いられている。

§2—3は，量の線分図表現の根拠の考察になっている。そこでつぎに量の面積図表現の根拠ということであるが，面積図の根拠は量の数値計算で乗法が使用されることになるという形

式上の（また結果的な）一致にあるのではなく，この形式的一致の理由でもある《量の積と面積の構造上の一致(同型)》という点にある。即ち，三つの量（カテゴリー）Q, Q′, Q″ において，$Q''\simeq Q\otimes Q'$ となっているときに，Q″はQとQ′がタテとヨコの辺に表現される面積図を表現としてもてることになるのである。

例. 速さ v で直線運動する質点が距離 d の二点間を時間 t で通過するという問題で，面積図



に依って $d=v\times t$ と求めてよい（但し，代入するのは数値）のは，v, t, d それぞれのカテゴリーとしての速度，（有向）時間，（有向）距離の量 Q_V, Q_T, Q_D に対し，$Q_V\otimes Q_T$ と Q_D が同型：$v\otimes t\mapsto d=d(v, t)$ でつながっているからである。

4－3　同型 Hom(Q,Hom(Q′,Q″))≃Hom(Q⊗Q′, Q″) による量 Q⊗Q′ の導出

Q, Q′, Q″ を同型な有理有向量とし，$\mathscr{R}(Q)=\mathscr{R}(Q')=\mathscr{R}(Q'')=\mathscr{N}$ と考える。Q, Q′, Q″ に対する Hom(Q, Hom(Q′, Q″)) の形をとる量は，$\mathscr{N}$ 上の1次元線型空間 Hom(Q⊗Q′, Q″) に同型であるが，このような文脈で，Q⊗Q′ を——形式的ではあっても——量として把えることが考えられることになる。但し，Hom(Q, Hom(Q′, Q″)) の Hom(Q⊗Q′, Q″) の上への同型としては

$$f\mapsto(a\otimes a'\mapsto f(a)(a'))$$

がそうである——これの逆同型は

$$g\mapsto(a\mapsto(a'\mapsto g(a\otimes a')))$$

である。

Hom(Q, Hom(Q′, Q″)) の形の量としては，加速度 Q_A がある。実際，Q_T, Q_L をそれぞれ時間，長さの量とするとき，速度 Q_V は $\mathrm{Hom}(Q_T, Q_L)$ のことで，$Q_A=\mathrm{Hom}(Q_T, Q_V)$ である。そこで，Q_Aは，$\mathrm{Hom}(Q_T\otimes Q_T, Q_L)$ と見なせる。また，Q_T の単位を s（エス），Q_L の単位を m（エム）とするとき，先の同型によって，$s\backslash(s\backslash m)$（$s$ を $s\backslash m\in\mathrm{Hom}(Q_T, Q_L)$ にうつす準同型：$Q_T\to\mathrm{Hom}(Q_T, Q_L)$）と $(s\otimes s)\backslash m$（$s\otimes s$ を m にうつす準同型：$Q_T\otimes Q_T\to Q_L$）が対応する。そしてこのことが，加速度の単位 $s\backslash(s\backslash m)$ が "m/s^2" と書かれることの理論的裏付けとなる。

以上，量の形式的な構成，数の導出，及び量の諸相について考察してきたわけであるが，本論文では紙数の都合から，数の計算における数の意味（身分）の問題には入っていくことが出来なかった。このテーマについては稿を改めて論ずることにする。

参　考　文　献

[1] Bourbaki, N.：『数学原論』「位相２」，東京図書，1968.

[2] 小島　順：“"量の計算" を見直す（１－６）”，数学セミナー，1977. 8月－1978. 1月.

[3] 田村二郎：“量と数の理論（１－IV）”，数学セミナー，1978.　3－6月.