量と数の形式（1）

宮　下　英　明

第Ⅰ部

1　“量”ということ

量とは何か。端的に，“量”として対象化（概念化）されたものである。では，何故それは“量”でなければならなかったのか。これについては，一概には答えられない。場合場合で，特有の事情と論理があるからである。

《しかし，異なる“量”のカテゴリーQ_1，Q_2，‥‥について，（それぞれの事情や論理に固有のものがあるにせよ）それらが同じく“量”として対象化されているということは，正しく“量”の規準と見なすべき一定の形式をQ_1，Q_2，‥‥が共有していることを示唆しているのではないだろうか》――このようにも考え得る。しかしこの問題については，Wittgenstein的な認識をもつことから出発しておくべきである。即ち，“量”については〈家族的類似性〉しかない；“量”という概念は存在しないのであり，存在するのは“量”という語と，それの現実における使用なのである，と(註1)。

この考え方に立つとき，《“量”とな何か》という“量”の身分問題は，《“量”とはどのような概念か》ではなく，《“量”として現実に対象化されているものの実際的な扱われ方，つまり“量”の形式は，どのようなものか》の問題になる。形式が明示的でなければ“形式”として明示的に示すというのが，これの内容である。

但し“形式”は，原理的に，一個の恣意性としてあるのみである。《どのようなものが形式と見なされているか，形式として認められるか》であって，《形式は何か》ではないことに注意しよう。

“量”の対象化――現象的には，“量”の語の使用――については，〈構造〉の観点からいくつかのレベルを区別することができる。例えば，《ある一定の手続きの下に数値化される》ということで“量”のことばを用いる，というレベル。このときの眼目，即ち，“量”の語を用いている規準は，数値の異同によって〈質〉を差異化・同一化することである。[“量”の語の現実的な使用は，数値計算（数値の異同を見ることも“計算”の意味のうちに含めて）を予定している。〈数値化〉以前の“量”――いわゆる“ナマの量”――が論理的に定立可能であるということは，このこととはまた別の問題である。]

これだけでは不十分だとすると，つぎには，数値の大小の順序によって〈質〉に順序を考えることまでを眼目とした，“量”のことばの使用が現れる。さらにこの上には，数値計算によって〈質〉の観念操作や〈質〉の変化の予見といったことなどを射程に入れることができるような，“量”のことばの使用が来る。

この三番目のレベルの“量”として，小島(註2)による実数体$\mathbb{R}$上の1次元線型空間としての“量”（Cf. §3.5）は，特記すべきものである。

（註1）Wittgenstein, L.：“Philosophical Investigations”, Basil Blackwell, Oxford, 1958（藤本隆志訳：『哲学探求』（ウィトゲンシュタ

イン全集8)，大修館，1976)．§§66－69.

(註2)　本稿をなす上でわたしが先行研究として顧慮したものは，実質的に，以下のものである：

[1 (1～6)] 小島　順：　"量の計算"を見直す(1～6)．数学セミナー(1977.8～1978.1)．

[2] 小島　順：　量の数学について．数学セミナー増刊，シンポジウム数学1 (数学と教育) (1980.4)，pp. 137－152.

[3 (上，下)] 南雲道夫：　量と実数(上，下)．数学セミナー(1979.1,2)．

[4 (1～4)] 田村二郎：　量と数の理論(1～4)．数学セミナー(1978.3～6)．

[3 (上)] は，量(体系)を代数的・位相的構造として定式化すること――量を"純粋数学的な概念"(p. 64)として打ち出すこと――を内容とする。それは、可換半群として量(体系)を規定する公理の措定から始まり，連続量の議論に至る。(ここで言う"連続"は，Dedekind切断の概念で定義される"連続"。"稠密"の意味で言われる"連続"ではない。)

この"代数的・位相的構造をもった量(体系)"の概念は，[4] の方では所与になる。[4] の主題は，これから数(正の整数から複素数まで)を――一貫して，量(要素)の倍関係の身分で――構成して見せることである。

[1] では，"量(要素)の倍関係としての数"が所与になる。実際，そこでは，量(体系)が実数体ℝの上の1次元線型空間として把捉されるが，このことは，量(要素)の倍関係として数を把捉することの裏返しになる。そして [1] は，量(体系)に対するこのような把捉の仕方に立って，量計算の意味を数学的に定式化していく。つまり，量計算が [1] の主題である。

2　導入――量の構成

はじめに，つぎの用語を導入しておく。例えば，"長さ"ということばは，"重さ"，"速さ"等から区別される量の一つのカテゴリー(一つの集合／体系――但し"体系"は，或る特定の構造が考えられている場合)を指すこともあるし，このカテゴリー内要素としての個々の長さを指すこともある。そこで"量"のことばが前者の意味で用いられる場合には"量(集合／体系)"，後者の意味で用いられる場合には"量(要素)"とそれぞれ言うことにする。(特に，"長さ(集合／体系)"，"長さ(要素)"といった言い回し。)

2.1　量(集合)の構成

量は，差し当たり，〈量を担うもの〉に対する〈量〉として意識される。いま，この意識形態を形式化することを考えてみる。

ところで，量を担う存在はいわゆる"実在"ではない。実際，量＝担われた量は，イデアールに思念される。その量を担う存在が"実在"するかどうかははじめから問われない(註)。換言すれば，

$$\text{存在}\,x \longmapsto x\text{の担う量(要素)}$$

が量(集合)の上への全射である。(勿論，xの〈存在〉としての身分は"実在"ではない。)

さて，量(集合) Qに関する《全射

$\phi：X \longrightarrow Q$；　$x \longmapsto x$の担う量(要素)

の存在》に対しては，所与XからのQの構成という逆の読み方ができる。

XからQの構成は，Xの分割という形になる。即ち，Xの要素の間の差異化・同一化の規準が与えられ，それぞれに基づいて同一のものが類をつくり，Xはこれらの類によって分割される。そして，これを"同値関係～"，"同値類"の概念を用いて述べたときの商集合X／～がQ(集合)の定式化になる。また，対応：

$$x \longmapsto [x] \quad (x \in X)$$

($[x]$ はxを代表元とする同値類)が，ϕである。但し，Qが"量"と呼ばれるにふさわしいものになるためには，ある一定の構造(§3.1)が必要である。(またこの構造は，XからのQの構成という文脈では，Xの構造から導入されると考えるべきである。)

さて，"実在"eにカテゴリーQの量を読むということは，(記号)変換

$$e \longrightarrow x \ (\in X)$$

にφを合成することにあたる。特に，“実在”に対しカテゴリーQの量を読もうとすることが意味をもつのは，その“実在”をXに属する記号存在へと変化することが意味をもつ限りにおいてである。

Xと対応$\phi: X \longrightarrow Q$は，論理的に定式化される。これの論理的であることが，量Qが“現実的”であることの必要条件である。しかし，対応：$e \longrightarrow x$の方は定式化されない。そもそも，eのカテゴリーは完全にオープンである。そしてeのxへの変換も，本質的あるいは原理的に，恣意的である——恣意的である他ない。これが，実在へのQの適用がオープンであることの説明である。

例．(1)　量“長さ”は，(幾何学的対象としての）線分のカテゴリーXから構成される。即ち，線分に関しての合同の関係～でXを割ることによる商X／～が，長さ（集合）の定式化になる。また，“もの”eの長さとは，eの記号変換としての線分$x \in X$（例えば，鉛筆において線分を“見る”）の長さのことである。なお，“長さ”がここでは〈測度〉以前の概念であることに注意しよう。

(2)　量“時間”は，“時計”によってつくられる。“時計”は時間を計るものである以前に時間を与えるものである。この場合“時計”とは，先ず，(循環論法になるが）時間の経過にしたがって〈相（貌)〉を変ずる何かである。それは，天体の運行でも“腹時計”でもよい。ともかく，〈相〉の変化をわれわれに現前させるということが，この場合に本質的な点である。さて，“時間”は，この〈相〉の変化のカテゴリーXから構成されるものとして説明できる。即ち，Xにおける同値関係～が何がしかの意味で考えられ，商X／～が時間の定式化になる，と。例えば，アナログ・ウォッチを考えてみよう。短針の1／12回転は，どれも同値である；また，これは長針の1回転ないし秒針の60回転とも同値である，等々。

《“時計”が時間を与える——しかし時間は“時計”以前には無いのか。いかなる種類の〈相〉の変化も認められない“真空”の中にも時間は在るのではないのか。》しかし，あなたのこの想念において，あなたは自らを“時計”として用いている。

(註)　例えば，1kgの概念は，1kgの実在を必要としない。実際，あなたは1kgの実在を示せるか——示せたことをどのようにして説明するか。

2.2　量の差

いま，形式的に一つの集合Qを所与とする。但し，Qとして念頭におくのは量（集合）である。本節および次節の主題は，加法と倍をもつ一つの体系DをQから導出しつつ，同時に，Qを量（体系）として定立することである。但し，以下は構成の手続きのスケッチであって，この手続きを“well-defined”なものとするために必要な条件は，次章で明示される。

先ず，Qの要素に関する全順序関係≦と“差”を基本概念に据える(註)。

差は，Qの要素の対$(X, Y) \in Q \times Q$についての差異化・同一化の一形式である。そしてこれの導入は，Q×Qに一つの同値関係～を導入することの意味になる。

(Q×Q)／～をDで表わす。また，$(X, Y) \in Q \times Q$を代表元とする同値類を$\overrightarrow{XY}$と書くことにする。つまり，“XとYの差ベクトル”と読まれることを想定して。そこで標準写像：

$$Q \times Q \longrightarrow D\,;\ (X, Y) \longmapsto \overrightarrow{XY}$$

は，Qの二要素にそれの差を対応させる意味になる。

～については，≦との両立が条件になる：

$$(\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'},\ X < Y) \Longrightarrow X' < Y'$$

そこで，Dの元$\overrightarrow{XX}$を0と書き，Dの元$\overrightarrow{XY}$は$X \leqq Y$のとき正（≧0），$X \geqq Y$のとき負（≦0）であると定める。また，Dの正元全体の集合をD^+で表わす。

Dにおける加法＋を

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XZ}$$

で定義する。Dはこの＋に関して可換（加法）群の構造をもつことになる。——零元0は$\overrightarrow{XX}$，$\overrightarrow{XY}$の対称元は$\overrightarrow{YX}$。

さて，量（体系）としてのQを，先ず，作用

域Dの外算法$+$を一つ定める構造のものとして定式化するとしよう。ここで$+$は，Qの元X，Dの元$\overrightarrow{XY}$に対し

$$X+\overrightarrow{XY}=Y$$

と定義される。

しかしこの定義は，任意の$X\in Q$，$x\in D$に対して$X+x$が定義されるということを保証するものではない。そこでつぎのことを条件とする。即ち，Qに最小元が存在しない場合には$+$はいたるところで定義される（任意の$X\in Q$，$x\in D$に対し，$x=\overrightarrow{XY}$となる$Y\in Q$が存在する）ものとし，Qに最小元Oが存在する場合には，D^+の元の作用であればつねに定義される（任意の$X\in Q$，$x\in D^+$に対し，$x=\overrightarrow{XY}$となる$Y\in Q$が存在する）とする。

（註）　もちろん，順序構造のみを根拠に“量”と称することも自由である。例えば，“硬度”など。

2.3　量の比

つぎに，Dの元——即ち，Qの元の差（ベクトル）——に関する基本概念として，“比（倍関係）”を導入する。

比の定式化は，“差”の場合とほぼ同様である。即ち，$D^*=D\setminus\{0\}$ （註1） とおくとき，比は対$(x, y)\in D^*\times D$に関する差異化・同一化の一形式であり，これらの導入は$D^*\times D$に一つの同値関係$\sim$を導入することに等しい。$(D^*\times D)/\sim$を$\mathcal{N}$で表わし，$(x, y)\in D^*\times D$を代表元とする同値類を$x:y$と書く（“比”ないし“倍”と読まれることを想定して）（註2）。また$x:x$を1，$x:0$を0と書く。

$\mathcal{N}$における乗法$\times$を，

$$(x:y)\times(y:z)=(y:z)\times(x:y)=x:z$$

で定義する。また，加法$+$を，

$$(x:y)+(x:z)=x:(y+z)$$

で定義する。そして，$+$と$\times$の間の分配則を条件に措いて，$\mathcal{N}$を可換体として定立する——このとき，0と1がそれぞれ零元と単位元；また$x:y\neq 0$の逆元は$y:x$。

つぎに，$\mathcal{N}$の元のDの元に対する作用$\times$を（$\mathcal{N}$の元を右から掛ける形で），

$$x\times(x:y)=y \quad (x\in D^*,\ y\in D)$$

$$0\times\xi=0 \quad (\xi\in\mathcal{N})$$

で定義する。但し，これが任意の$x\in D^*$と$\xi\in\mathcal{N}$に対し定義される——即ち，$\xi=x:y$となる$y\in D$が存在する——ということは仮定しない。

（註1）　“$\setminus$”は，$A\setminus B=\{x \mid x\in A$かつ$x\notin B\}$として定義される記号。

（註2）　“$x:y$”では普通はyの方が“基準”の身分で$\neq 0$とされて，“yに対するxの比”などと読まれたりする。しかしここでは，倍の和，倍の合成の式の読み易さのために，xの方を“基準”の身分で$\neq 0$とする。

3　量形式

3.1　量形式（Q，D，$\mathcal{N}$）

本節では，前章で論じた量の構成を“量形式”という形で改めて述べ直し，言及を省略してきた量構成の前提条件も明示していく。また，前章では触れなかった位相構造を，量形式の一要因として述べていく。

3.1.1　代数的構造

先ず，

（A1）量（体系）Qは，ねじれのない可換群（註1） $D\neq\{0\}$を作用域にもつ集合である．

Dの内算法を加法$+$で記す。単位元（中立元）を0と書き，$x\in D$の逆元（対称元）を$-x$と書く。また，$D\setminus\{0\}$をD^*と表わす。

Qの元Xに対するDの元xの作用が定義されるとき，これを$X+x$と書くことにする。作用（外算法）$+$はつぎのように条件づけられる：

（A2）$X\in Q$，x，$y\in D$に対し　$(X+x)+y$が定義されるとき$X+(x+y)$も定義されて，かつ

$$(X+x)+y=X+(x+y).$$

（A3）任意のX，$X'\in Q$に対し，$X+x=X'$

となる$x \in$ Dが一つ，しかもただ一つ存在する．

これより特に，すべての$X \in$ Qに対し$X+0=X$が成り立つ（註2）

Dは，有理数体$\mathbb{Q}$を作用域にもつ集合になる。即ち，$x \in$ Dに対する整数$n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$の作用$x \times n$を，$n \geqq 0$のときには$x$の$n$回の累加として，$n<0$のときは$-(x \times (-n))$として，定義する。そして，有理数$\frac{n}{m}$の$x=y \times m$（註3）に対する作用を，$(y \times m) \times \frac{n}{m}=y \times n$と定義する。

Dについて，二つの場合を区別する。

（1）一つは，

（A 4$_0$）群Dはただ一つの元によって生成される；即ち，$u \in$ D*が存在して，Dの任意の元が$u \times n$ $(n \in \mathbb{Z})$ の形に書ける．

場合である——このことを指して，“Dは離散”と言うことにする。

離散なDに応ずるQの元は，一つの元$X \in$ Qを固定するとき，$X+(u \times n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ の形に書ける。そこでこのときのQについても，“離散”のことばを用いることにする。

離散なDでは，有理数の（倍）作用$\times$はいたるところで定義されるものではない。なおこの場合，$\mathcal{N}=\mathbb{Q}$とおく。

（2）Dのもう一つの場合は，つぎのものである：

（A 4）Dは，$\mathbb{Q}$の拡大体（註4）になっている可換体$\mathcal{N}$を係数体とする線型空間である．

体$\mathcal{N}$の零元，単位元は，それぞれ有理数0，1である。各$\xi \in \mathcal{N}$の加法$+$に関する逆元（対称元）を$-\xi$とかき，$\xi \in \mathcal{N}^*=\mathcal{N} \setminus \{0\}$の乗法$\times$に関する逆元を$\xi^{-1}$と書く。

Dの元xに対する$\mathcal{N}$の元ξの作用を，有理数倍と同じく，$x \times \xi$と書く（註5）。実際これは，有理数倍の作用$\times$の拡張になっている（註6）。

ここでさらに，つぎの条件を措く：

（A 5）任意の$x \in$ D*，$y \in$ Dに対し，$x \times \xi=y$となるξが一つ，しかもただ一つ存在する．

したがって特に，線型空間Dは1次元である。

なお，QとDの間の外算法$+$がいたるところで定義されている場合には，QはDが併進空間のアフィン空間となるわけである。

（註1）　可換群Gは，単位元だけが有限位数の元であるとき，ねじれがない（torsion free）と言われる。

（註2）　任意の$X \in$ Qに対し，（A 4）より$X+a=X$となる$a \in$ Dが存在する。$X+a=(X+a)+a=X+(a+a)$（(A3)）。(A4) より$a+a=a$，よって$a=0$。

（註3）Dにねじれがないとの仮定（(A1)）より，$x \in$ Dと整数$m \neq 0$に対し$x=y \times m$を満たす$y \in$ Dは，存在すればただ一つである。

（註4）“標数0の体”と言っても同じである。

（註5）(A4) に含意されている外算法$\times$の条件は，

$$(x+y) \times \xi=x \times \xi+y \times \xi \cdot$$
$$x \times (\xi \times \eta)=(x \times \xi) \times \eta \cdot$$
$$x \times (\xi+\eta)=x \times \xi+x \times \eta \cdot$$
$$x \times 1=x \cdot$$

である。これより特に，

$$0 \times \xi=0, \quad x \times 0=0.$$
$$(-x) \times \xi=x \times (-\xi)=-(x \times \xi) \cdot$$

（註6）　Dの元に対する$\mathcal{N}$に元の作用を$*$で表す。$x \in$ Dと有理数$\frac{n}{m}$ $(m \in \mathbb{Z}^*$，$n \in \mathbb{Z}$に対し$x * \frac{n}{m}=x \times \frac{n}{m}$となることを示すわけであるが，$x=0$のときはともに$=0$。そこで$x \neq 0$とする。

整数nに対し$x*n=x \times n$であることを示す。$n=0$のときはともに$=0$。$n>0$に対しては，$x*n=x*$（1のn回の累加）$=$（$(x*1)$のn回の累加）。$x*1=x$だから，$x*\mathrm{n}=x \times \mathrm{n}$。また，$x*(-n)=-(x*\mathrm{n})=-(x \times \mathrm{n})=x \times (-n)$。結局，すべての$n \in \mathbb{Z}$に対し$x*n=x \times n$。

つぎに，整数$m \neq 0$に対する$x*m^{-1}$の場合。$x*m^{-1}=y$とおくと$x=x*(m^{-1} \times m)=y*m=y \times m$，よって$y=x \times m^{-1}$，即ち　$x*m^{-1}=x \times m^{-1}$。

そこで$x*\frac{n}{m}$の場合であるが，$x*\frac{n}{m}=x*(m^{-1} \times n)=(x*m^{-1})*\mathrm{n}=(x \times m^{-1}) \times n=x \times \frac{n}{m}$。

3.1.2　順序構造

先ず，

（O1）群Dの部分半群D^+で，つぎの条件を満たすものが存在する：

$$D^+\cap D^-=\{0\},\quad D=D^+\cup D^-.$$

但しここで，$D^-=\{-x\mid x\in D^+\}$。

このとき，Dの順序群[註1]の構造で，D^+を正元（$\geqq 0$の元）の全体とするようなものが一意的に定まり（$x\leqq y$が，$x+z=y$なる$z\in D^+$が存在することとして定義される），しかも順序群Dは全順序集合になる。ここで，$D^+\setminus\{0\}$をD^{+*}とおく。

Qの二元X，Yに対する関係$X\leqq Y$を，条件：

$X_+x=Y$となる$x\in D$はD^+に属する

で定義する。≦はQ上の全順序関係になる[註2]。

Qのこの順序構造に関しては，二つの場合を考える。即ち，Qに最小元がある――Oで表わす――場合と，ない場合である。そしてこの二つの場合のそれぞれについて，つぎの条件を措く：

（$O2_0$）任意の$X\in Q$，$x\in D^+$に対しX_+xが定義される．

（O2）作用$_+$はいたるところで定義される．

最小元をもたないQの場合，$X\in Q$，x，$y\in D$に対し

（♯）　　$x<y\Longleftrightarrow X_+x<X_+y$

が成り立つ[註3]。特に，各$X\in Q$に対し定義されるDからQの上への写像：

$$x\longmapsto X_+x$$

は，順序同型となる。

最小元をもつQの場合，D^+はO_+xが定義される$x\in D$全体の集合と一致する[註4]。また，上の（♯）には，

（♯1）$x<y$でX_+xが定義されれば，X_+yも定義されて，かつ$X_+x<X_+y$・

（♯2）　　$X_+x<X_+y\Longrightarrow x<y$・

が対応する。特に，D^+からQの上への[註5]写像：

$$x\longmapsto O_+x$$

は，順序同型になる。

なお，$x\in D^+$，m，$n\in\mathbb{Z}$に対し

$$m<n\iff x_\times m<x_\times n$$

である。Dが離散の場合には（加法群Dが一つの元$u\in D^+$によって生成されることになるので），Dの二元の間の順序関係はこの関係で言い尽くされる。

Dの係数体の$\mathcal{N}$については，順序体[註6]の構造を考える。

Dが離散の場合は$\mathcal{N}=\mathbb{Q}$であるが，この$\mathbb{Q}$には普通の順序を考える。このとき$\mathbb{Q}$は順序体になる。（しかも，$\mathbb{Q}$を順序体にするような順序は，この普通の順序に限られる。）

Dが非離散の場合には，先ず条件：

（O3）$x\in D^{+*}$，$y\in D^+$，$\xi\in\mathcal{N}$に対し，

$$x_\times\xi\in D^+\Longrightarrow y_\times\xi\in D^+.$$

を措く。そして$\mathcal{N}$の二元ξ．ηに対する関係$\xi\leqq\eta$を，$u\in D^{+*}$に対して$u_\times\xi\leqq u_\times\eta$であることと定義する。条件（$O$3）により，関係$\xi\leqq\eta$は$u\in D^{+*}$のとり方に依らない[註7]。

各$u\in D^{+*}$に対してDの$\mathcal{N}$の上への双射u^*：

$$x=u_\times\xi\longmapsto\xi$$

が定義されるが，これはD上の（全）順序関係≦を$\mathcal{N}$の二項関係≦に写すものになっている（$x\leqq y$のとき$u^*(x)\leqq u^*(y)$）。したがって，$\mathcal{N}$の≦は全順序関係である。（u^*は，Dと$\mathcal{N}$の順序構造に関する同型になる。）

$\mathcal{N}$の正元（$\geqq 0$の元）全体の集合を$\mathcal{N}^+$で表わす。また$\mathcal{N}^-=\{-\xi\mid\xi\in\mathcal{N}^+\}$，$\mathcal{N}^{+*}=\mathcal{N}^+\setminus\{0\}$とおく。$x\in D^*$，$\xi\in\mathcal{N}$に対し，つぎが成り立つ[註8]：

$$\xi\in\mathcal{N}^+\Longleftrightarrow x\text{と}x_\times\xi\text{は同符号}$$

$$(\xi\in\mathcal{N}^-\Longleftrightarrow x\text{と}x_\times\xi\text{は異符号})$$

また，ξ，$\eta\in\mathcal{N}$に対し，$\xi\leqq\eta$は$\xi+\zeta=\eta$となる$\zeta\in\mathcal{N}^+$が存在することと同値[註9]。なお，定義そのものであるが，$x\in D^*$，ξ，$\eta\in\mathcal{N}$に対し，

$$x\in D^+\Longrightarrow(\xi<\eta\Longleftrightarrow x_\times\xi<x_\times\eta)$$

$$(x\in D^-\Longrightarrow(\xi<\eta\Longleftrightarrow x_\times\xi>x_\times\eta)).$$

$\mathcal{N}$は順序≦に関して順序体になる[註10]。そしてこれはまた，$\mathbb{Q}$の順序拡大体になっている[註11]。

非離散なDは稠密[註12]である。そして先の（♯）より，これに応ずるQも稠密になる。

さて，Dが離散のときつぎの条件（“Archimedesの公理”）が満たされている：

（O4）任意の$x\in \mathrm{D}^{+*}$，$y\in \mathrm{D}$に対し$x\times n\geqq y$となる$n\in\mathbb{N}$が存在する．

また，Dの係数体$\mathscr{N}=\mathbb{Q}$はArchimedes的順序体になっている——即ち，任意の$\xi\in\mathscr{N}^{+*}$，$\eta\in\mathscr{N}$に対し$\xi\times n\geqq\eta$となる$n\in\mathbb{N}$が存在する。

Dが非離散（稠密）のときには，（O4）を改めてDの条件として措く。このとき，順序体$\mathscr{N}$はArchimedes的順序体になる（註13）。したがって特に，$\mathscr{N}$は実数順序体$\mathbb{R}$の部分体に同型——実際，相似同型（註14）——である。

なお，Archimedes的であることの含意として，

・任意の$\xi\in\mathscr{N}$に対し，$n\leqq\xi<n+1$となるような$n\in\mathbb{Z}$が存在する．

・$\xi<\eta$なるξ，$\eta\in\mathscr{N}$に対し，$\xi<\alpha<\eta$となるような$\alpha\in\mathbb{Q}$が存在する．

稠密なQで，“連続性の公理”：

（O5）Qの，上に有界な部分集合Mにはその上限supMが存在し，下に有界な部分集合Mにはその下限infMが存在する．

を満たすものを，連続量と呼ぶ。この場合，Qに応ずるD，$\mathscr{N}$も連続性の公理を満たすことになり，特に順序体$\mathscr{N}$は完備となる（註15）。したがって，$\mathscr{N}=\mathbb{R}$である（註16）。

（註1）　可換群（算法を加法的に記す）が順序集合で，条件：

$$x\geqq y \text{ ならば } x+z\geqq y+z$$

を満たすとき，これを順序群といい，$x\geqq 0$である元xを正元という。

（註2）　≦が順序関係であることは，これの定義と（O1）から明らか。さらに全順序関係であることを言うために，X，$Y\in$Qに対し，$X+x=Y$とすると，$x\in \mathrm{D}^{+*}$のとき$X<Y$；$x\in \mathrm{D}\setminus \mathrm{D}^{+*}=\mathrm{D}^-$のとき$-x\in \mathrm{D}^+$で$Y+(-x)=X$だから（実際，$Y+y=X$とすると，$Y=X+x=(Y+y)+x=Y+(y+x)$，よって$y=-x$），$Y\leqq X$。

（註3）　$x<y$は，$x+z=y$となる$z\in \mathrm{D}^{+*}$が存在することを意味する。Qの≦の定義から，$X+x<(X+x)+z=X+(x+z)=X+y$。さらにこれより，$x\geqq y$のとき$X+x\geqq X+y$。よって，$X+x<X+y$ならば$x<y$。

（註4）　$x\in \mathrm{D}^+$に対しては，定義から$O+x$が定義される。逆に，$x\in \mathrm{D}$に対し$O+x$が定義されれば，$x\in \mathrm{D}^+$である。実際，$x\in \mathrm{D}\setminus \mathrm{D}^+$と仮定すると，$-x\in \mathrm{D}^{+*}$。よって$(O+x)+(-x)$が定義されて，これは$=O+(x+(-x))=O$。ところが$-x\in \mathrm{D}^{+*}$だから$O+x<O$。これは，$O$が最小元であることに矛盾する。

（註5）　各$X\in$Qに対し，$O+x=X$となる$x\in$Dがとれる。$O+x$が定義されることから，$x\in \mathrm{D}^+$。

（註6）（全）順序構造をもつ可換体は，加法群として順序群であって，条件

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0 \text{ ならば } x\times y\geqq 0$$

を満たすとき，順序体と呼ばれる。

（註7）　u，$v\in \mathrm{D}^{+*}$，ξ，$\eta\in\mathscr{N}$とする。$u\times\xi\leqq u\times\eta$のとき，$\zeta\in\mathscr{N}$があって，$u\times\zeta\in \mathrm{D}^+$かつ$u\times\xi+u\times\zeta=u\times\eta$。これより$\xi+\zeta=\eta$，そしてさらに$v\times\xi+v\times\zeta=v\times\eta$。また，$u\times\zeta\in \mathrm{D}^+$と（$O$3）より，$v\times\zeta\in \mathrm{D}^+$。したがって$v\times\xi\leqq v\times\eta$。

（註8）　$\xi\in\mathscr{N}^+$，即ち，$\xi\geqq 0$のとき，$x\in \mathrm{D}^+$に対し$x\times\xi\geqq x\times 0=0$，即ち$x\times\xi\in \mathrm{D}^+$。また$x\in \mathrm{D}^-$に対しては，$-x\in \mathrm{D}^+$だから$-(x\times\xi)=(-x)\times\xi\geqq(-x)\times 0=0$，即ち$-(x\times\xi)\in \mathrm{D}^+$，よって$x\times\xi\in \mathrm{D}^-$。

逆に，x，$x\times\xi\in \mathrm{D}^+$なら，$x\times\xi\geqq 0=x\times 0$より$\xi\geqq 0$，即ち$\xi\in\mathscr{N}^+$。また，$x$，$x\times\xi\in \mathrm{D}^-$なら，$-x\in \mathrm{D}^+$，$(-x)\times\xi=-(x\times\xi)\in \mathrm{D}^+$より，やはり$\xi\in\mathscr{N}^+$。

（註9）　$\xi\leqq\eta$の意味は，$x\in \mathrm{D}^{+*}$に対し$x\times\xi\leqq x\times\eta$であること。$x\times\xi+x\times\zeta=x\times\eta$とすると，$x\times\zeta\in \mathrm{D}^+$で，よって$\zeta\in\mathscr{N}^+$。また，$x\times(\xi+\zeta)=x\times\eta$より$\xi+\zeta=\eta$。

（註10）　ξ，$\eta\in\mathscr{N}^+$とする。$x\in \mathrm{D}^{+*}$に対し，$x\times\xi\in \mathrm{D}^+$，さらに$x\times(\xi\times\eta)=(x\times\xi)\times\eta\in \mathrm{D}^+$。よって$\xi\times\eta\in\mathscr{N}^+$。

（註11）　実際，$\mathscr{N}$の順序体の構造は$\mathbb{Q}$に順序体の構造を導くが，$\mathbb{Q}$は一意的にしか順序づけられない。

（註12）　全順序集合は，任意の二元$a<b$に対し$a<c<b$となる元cがとれるとき，稠密であると言う。

（註１３）　実際，任意の$\xi \in \mathcal{N}^{+*}$，$\eta \in \mathcal{N}$と$x \in \mathrm{D}^{+*}$に対し，$x \times \xi \in \mathrm{D}^{+*}$より自然数$n$が存在して$x \times \eta <(x \times \xi) \times n = x \times (\xi \times n)$。$x \in \mathrm{D}^{+}$より$\xi \times n > \eta$。

（註１４）　二つの順序体は，正元をつねに正元に対応させるような同型対応がその間に存在するとき，相似同型であると言われる。

（註１５）　連続性の公理を満たす順序体$\mathcal{N}$が完備であることの証明は，実数列に関するCauchyの収束判定法の証明（周知のもの）と全く同型である。

（註１６）　順序体$\mathbb{R}$は有理数体$\mathbb{Q}$の完備なArchimedes的順序拡大体として特徴づけられる。

3.1.3　位相構造

Qの二元$X<Y$に対し，端点X，Yの開区間］X，Y［を

$$]X, X[= \{Z \in \mathrm{Q} \mid X<Z<X\}$$

で定義する――但し，Qが最小元Oをもつ場合には，Qの開区間に$[O, X[= \{Z \in \mathrm{Q} \mid O \leqq Z<X\}$（$X \in \mathrm{Q}$）の形の集合を含める。そして，Qの各点$X$に対し，$X$を含む開区間全体の集合を$\mathrm{U}(X)$で表す。このとき，つぎの条件が満たされる：

i）　$U \in \mathrm{U}(X) \Longrightarrow X \in U$.

ii）　$U_1, \cdots, U_n \in \mathrm{U}(X)$に対し，$U \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n$であるような$U \subset \mathrm{U}(X)$が存在する.

iii）$U \in \mathrm{U}(X)$，$Y \in U$に対し，$V \subset U$であるような$V \in \mathrm{U}(Y)$が存在する.

したがって，Qの位相$\mathfrak{O}$で，$\mathrm{U}(X)$がXの基本開近傍系となるようなものが一意的に存在する。

位相$\mathfrak{O}$は，つぎのようにしても得られる。先ず，$X \in \mathrm{Q}$，$x \in \mathrm{D}^{+} \setminus \{0\}$に対し，$X<Y+x$，$Y<X+x$となる$Y \in \mathrm{Q}$全体の集合を$\mathrm{U}(X, x)$で表わす。そして$x$が$\mathrm{D}^{+} \setminus \{0\}$を動くときの$\mathrm{U}(X, x)$全体の集合を$\mathrm{U}(X)$とおく。

すると今度の$\mathrm{U}(X)$（$X \in \mathrm{Q}$）もまた，条件i），ii），iii）を満たす(註1)。よって，Qの位相$\mathfrak{O}'$で，$\mathfrak{O}'$に関して$\mathrm{U}(X)$がXの基本近傍系になるようなものが一意的に存在する――このとき，$\mathrm{U}(X, x)$をXのx－近傍と読む。そして実際，この$\mathfrak{O}'$は$\mathfrak{O}$である(註2)。

なお，離散なQの場合，位相$\mathfrak{O}$は離散位相のことになる。

（註１）　iii）――即ち，$Y \in \mathrm{U}(X, x)$から$\mathrm{U}(Y, w) \subset \mathrm{U}(X, x)$となる$w \in \mathrm{D}^{+} \setminus \{0\}$の存在を示すこと――だけが問題である。$Y \in \mathrm{U}(X, x)$の定義から，$X+y=Y+x$，$Y+z=X+x$となる$y$，$z \in \mathrm{D}^{+*}$がとれる。

$Y<X$のとき，$Y+u=X$となる$u \in \mathrm{D}$は>0。$u+y \in \mathrm{D}^{+}$より$Y+(u+y)$が定義できて，このとき$Y+(u+y)=X+y=Y+x$。よって$u+y=x$。いま$w=\min(u, y)$とおく。このとき任意の$Z \in \mathrm{U}(Y, w)$について，$Z+x=(Z+y)+u \geqq (Z+w)+u>Y+u=X$。また，$Z<Y+w \leqq Y+u=X<X+x$。よって$Z \in \mathrm{U}(X, x)$。結局，$\mathrm{U}(Y, w) \subset \mathrm{U}(X, x)$。

$X<Y$のとき，$X+v=Y$となる$v \in \mathrm{D}$は>0。$v+z \in \mathrm{D}^{+}$より$X+(v+z)=Y+z=X+x$。よって$v+z=x$。いま$w=\min(v, z)$とおく。このとき任意の$Z \in \mathrm{U}(Y, w)$について，$Z+x=Z+(v+z)>Z+w>Y>X$。$Z<Y+w=(X+v)+w \leqq X+(v+z)=X+x$。よって$Z \in \mathrm{U}(X, x)$で，結局$\mathrm{U}(Y, w) \subset \mathrm{U}(X, x)$。

（註２）　各$X \in \mathrm{Q}$に対し，Xを含む各開区間が或る$\mathrm{U}(X, x)$を含み，また各$\mathrm{U}(X, x)$がXを含む或る開区間を含むということが，所期の結論である。ところが，Qが最小元をもたない場合には，$\mathrm{U}(X, x)$は開区間$]X+(-x), X+x[$のこと。また，Qが最小元Oをもつ場合には，$X=O+y$に対し

$$\mathrm{U}(X, x) = \begin{cases}]X+(-x)\ \ X+x\,[& (x \leqq y) \\ [O, X+x\,[& (x>y) \end{cases}$$

である。よって，結論は自明。

3.2　量の分類枠

これまで述べてきたことから，つぎのものが量――量形式――に対する一つの分類枠になる：

	離散	稠密	
		非・連続	連続
最小元あり			
最小元なし			

3.3　量直線

3.3.1　量直線

Qを直線（点の集合として）とする。そしてこれに，通常の順序構造を考える。即ち，直線Qに正の方向を定め，Qの元X，Yの間の順序関係$X \leqq Y$を，XからYへの方向が正であることとして定義する。この順序は全順序である。

また，Qに§3.1.3で述べた位相——即ち，直線の通常の位相——を考える。

Q×Q上の同値関係〜をつぎのように定義する。即ち，(X, Y)，$(X', Y') \in$ Q×Qに対し$(X, Y) \sim (X', Y')$であるとは，XからYへの方向とX'からY'への方向が同じで，かつX，Yを端点とする線分とX'，Y'を端点とする線分が合同であること。このとき，$(X, Y) \in$ Q×Qを代表元とする同値類を$\overrightarrow{XY}$と表現する。

ここでの“合同”を同値関係〜の条件の形で述べるならば，つぎのようになる[註1]：

(d1) 任意のX，Y，$Z \in$ Qに対し，$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZW}$となるような$W \in$ Qが一つ，しかもただ一つ存在する。

(d2) X，Y，X'，$Y' \in$ Qに対し，
$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'} \Longrightarrow \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{Y'X'}.$$

(d3) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$，$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{Y'Z'}$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{X'Z'}.$$

特にこれから，任意のX，$Y \in$ Qに対し
$$\overrightarrow{XX} = \overrightarrow{YY}$$
であることが導かれる[註2]。$\overrightarrow{XX}$を0と書く。

また，

(d4) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZW} \Longrightarrow \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{YW}$

を条件として措く。

類の集合（Q×Q）／〜をDとおく。条件(d1)，(d3)より，Dの内算法（加法）＋を
$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$$
で定義できる。そしてこれに関して，Dは可換群の構造をもつことになる——0が単位元（中立元）で，$\overrightarrow{XY}$の逆元（対称元）は$\overrightarrow{YX}$[註3]。

Dは，直線Qの二点の差ベクトルの集合として読む。そして，Qの元（点）Xに対するDの元xの作用X_+xを，
$$x = \overrightarrow{XY}\text{のとき，}X_+x = Y,$$
というように定義する。（この定義は，条件(d1)により意味をもつ。）

このとき，すべての$X \in$ Qに対して$X \leqq X_+x$となる$x \in$ Dの全体D^+は，ベクトル$\overrightarrow{XY}$で$X \leqq Y$であるようなものの全体と一致する[註4]。したがって，D^+は群Dの部分半群で，また$D^- = \{-x \mid x \in D^+\}$とおくとき，$D^+ \cap D^- = \{0\}$，$D^+ \cup D^- = D$。そこで$D^+$を正元の全体とするようなDの順序群の構造が一意的に決まり，かつこの順序は全順序である。

$D^* \times D$上の同値関係〜で，つぎのようなものが存在すると仮定する[註5]——但し，$(x, y) \in D^* \times D$を代表元とする同値類を$x : y$と書く（“比”ないし“倍”の読みを意識して）[註6]：

(r1) 任意のx，$z \in D^*$，$y \in$ Dに対し，$x : y = z : w$となるような$w \in$ Dが一つ，しかもただ一つ存在する．

(r2) x，y，x'，$y' \in D^*$に対し，
$$x : y = x' : y' \Longrightarrow y : x = y' : x'.$$

(r3) $x : y = x' : y'$，$x : z = x' : z'$
$$\Longrightarrow x : (y+z) = x' : (y'+z').$$

(r4) $x : y = x' : y'$，$y : z = y' : z'$
$$\Longrightarrow x : z = x' : z'.$$

特にこれから，任意のx，$y \in Q^*$に対し
$$x : 0 = y : 0,\quad x : x = y : y$$
であることが導かれる[註7]。$x : 0$を0，$x : x$を1と書く。

また．

(r5) x，y，$z \in D^*$，$w \in$ Dに対し，
$$x : y = z : w \Longrightarrow x : z = y : w.$$

(r6) $x : y = z : w$で，xとyが同符号ならば，zとwも同符号．

を条件として措く。

$\mathcal{N} = (D^* \times D) / \sim$とおく。以上の条件により，$\mathcal{N}$に二つの可換な内算法＋（加法），×（乗

法）を，それぞれ

$(x:y)+(x:z)=x:(y+z).$

$$\begin{cases}(x:y)\times(y:z)=x:z\\ 0\times\xi=0 \quad (\xi\in\mathcal{N})\end{cases}$$

で定義できる。

＋と×は，それぞれ$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}^*$に可換群の構造を与える。特に，$(\mathcal{N},+)$に関しては0が単位元（中立元）で$x:y$の逆元（対称元）は$x:(-y)=$（註8）$(-x):y$，$(\mathcal{N}^*,\times)$に関しては1が単位元で$x:y\neq 0$の逆元は$y:x$。

また，つぎのことが導かれる（註9）：

$$\xi=x:y=z:w \text{ かつ } x+z\neq 0 \Longrightarrow \xi=(x+z):(y+w).$$

＋と×はさらに，$\mathcal{N}$に（可換）体の構造を定義する（註10）―― 0が零元で，1が単位元。

つぎに，$\mathcal{N}$の元のDの元に対する作用$\times$を（$\mathcal{N}$の元を右から掛ける形で）.

$$x\times(x:y)=y \quad (x\in \mathrm{D}^*,\ y\in\mathrm{D})$$

$$0\times\xi=0 \qquad (\xi\in\mathcal{N})$$

で定義する。

この定義から

$$(x\times\xi)\times\eta=x\times(\xi\times\eta).$$

$$x\times\xi+x\times\eta=x\times(\xi+\eta).$$

$$x\times 1=x.$$

さらに.

$$(x+y)\times\xi=x\times\xi+y\times\xi$$

が成り立つ（註11）。したがって，Dは体$\mathcal{N}$上の線型空間ということになり．しかも$\times$の定義から，1次元である。

すべての$x\in\mathrm{D}^+$に対して$x\times\xi\in\mathrm{D}^+$となる$\xi\in\mathcal{N}$の全体$\mathcal{N}^+$は，同符号の$x\in\mathrm{D}^*$，$y\in\mathrm{D}$に対する$x:y$（(r6)よりこの対象化は意味をもつ）の全体と一致する（註12）。したがって，$\mathcal{N}^+$は加法＋，乗法×のそれぞれに関して$\mathcal{N}$の部分半群で，また$\mathcal{N}^-=\{-\xi \mid \xi\in\mathcal{N}^+\}$とおくとき，$\mathcal{N}^+\cap\mathcal{N}^-=\{0\}$，$\mathcal{N}^+\cup\mathcal{N}^-=\mathcal{N}$。そこで，$\mathcal{N}^+$を正元の全体とするような$(\mathcal{N},+)$の順序群の構造が一意的に決まり，かつこの順序は全順序で，さらに$\mathcal{N}$は順序体になる。

直線Qに関するArchimedesの公理：

Q上の線分XY，ZWに対し，有限個の点T_1，T_2，$\cdots T_n$をとり，$ZW\equiv XT_1\equiv T_1T_2\equiv\cdots\equiv T_{n-1}T_n$かつ$Y$が$X$，$T_n$の間にあるというようできる．

（≡は，合同の記号）より，DはArchimedesの公理：

任意の$x\in\mathrm{D}^+\setminus\{0\}$，$y\in\mathrm{D}$に対し，$x\times n\geqq y$となる$n\in\mathbb{N}$が存在する．

を満たす（註13）。したがってまた，順序加法群の構造に関してDと同型な$\mathcal{N}$（§3.1.2）も，Archimedesの公理を満たす。

また，直線Qの連続性の公理：

上に有界な部分集合にはその上限が存在し，下に有界な部分集合にはその下限が存在する．

から，順序体$\mathcal{N}$の完備であること，そして結局実数の順序体$\mathbb{R}$と一致することが，導かれる（§3.1.2）。

さて，以上のように規定したQ，D，$\mathcal{N}$の組は，量（体系）の形式（前節）を満たしている。われわれは，この量（体系）としての$\mathrm{Q}=(\mathrm{Q},\mathrm{D},\mathcal{N})$を量直線と呼ぶことにする。

（註1）　これの“事実性”の問題（化）は，存在論の領域に属する。

（註2）　$\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YW}$とすると，$\overrightarrow{WY'}=\overrightarrow{XX'}$。この二つの式と条件（d3）より，$\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$。

（註3）　＋が群の構造を定める算法であるための条件は，明らかに満たされている。そして，条件（d4）より＋は可換。実際，$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{XY}$を言うために$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{ZW}$とすると，（d4）より$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{YW}$で，したがって$\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{ZW}=\overrightarrow{YW}=\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}$。

（註4）　$x\in\mathrm{D}^+$がベクトル$\overrightarrow{XY}$であれば，$X\leqq X+\overrightarrow{XY}=Y$。逆に，ベクトル$\overrightarrow{XY}$が$X\leqq Y$となっていれば，任意の$Z\in\mathrm{Q}$に対し，$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{ZW}$としたとき$Z\leqq W=Z+\overrightarrow{ZW}=Z+\overrightarrow{XY}$。よって$\overrightarrow{XY}\in\mathrm{D}^+$。

（註5）　これの“事実性”の問題（化）も，存在論の領域に属する。

（註6）　§2.3，（註2）参照。

（註7）　$x:0=y:w$とすると，$y:(w+w)=x:(0+0)=y:w$，よって$w+w=w$。これより，$w=0$。また，$x:x=y:w$とすると，$w\neq 0$で，$w:y=x:x$。この二つの式と条件（r4）よ

り，$x:x=y:y$。

（註8）　$y=0$のときは，$x:(-y)=(-x):y=0$。$y\neq 0$のとき，$x:(-y)=(-x):w$とすると，$x:(-x)=(-y):w$。一方，$x:(-x)$は，$x:x=(-y):(-y)$の対称元，よって$=(-y):y$。結局，$(-y):w=(-y):y$となって，これより$w=y$。

（註9）　$y=0$のとき$w=0$で，$x:y=(x+z):(y+w)=0$。そこで$y\neq 0$として，$x:y=(x+z):(y+v)$とする。このとき$x:(x+z)=y:(y+v)$。よって，$1+(x:z)=1+(y:v)$，さらに$x:z=y:v$。一方，$x:y=z:w$から$x:z=y:w$。結局，$v=w$。

（註10）　定義から，任意の$\xi\in\mathcal{N}$に対し$0\times\xi=\xi\times 0=0$。そこで，確かめるべきこととして残るのは，分配法則：$(\xi+\eta)\times\lambda=\xi\times\lambda+\eta\times\lambda$の成り立つことである。

$\xi=0$か$\eta=0$のときは自明。そこでξ，$\eta\neq 0$として，$x\in D^{*}$に対し，$\xi=x:y$，$\eta=x:z$とする。このときy，$z\neq 0$である。

$y+z=0$のとき，$\lambda=y:w$とする。$\lambda=(-y):(-w)$であるから，$\xi\times\lambda+\eta\times\lambda=(x:y)\times(y:w)+(x:(-y))\times((-y):(-w))=(x:w)+(x:(-w))=0$。一方，$(\xi+\eta)\times\lambda=0\times\lambda=0$。

また$y+z\neq 0$のとき，$\lambda=y:u=z:v$とすると，$\lambda=(y+z):(u+v)$。よって，$(\xi+\eta)\times\lambda=x:(u+v)$，$\xi\times\lambda+\eta\times\lambda=(x:u)+(x:v)=x:(u+v)$。

（註11）　$x=0$か$y=0$のときは自明。また$x+y=0$ならば$(x+y)\times\xi=0$で，また$y=-x$だから，$x\times\xi+y\times\xi=x\times\xi+(-(x\times\xi))=0$。残るは，$x$，$y$，$x+y\neq 0$の場合である。しかし，$x\times\xi=x'$，$y\times\xi=y'$とおくとき，$\xi=x:x'=y:y'$で，これより$\xi=(x+y):(x'+y')$。そしてこれは，所期の式に他ならない。

（註12）　$x\in D^{*}$に対し，$x\times\xi=y$，$\xi=x:y$，$\xi=(-x):(-y)$が互いに同値であることから明らか。

（註13）　$y>0$として，先ずQの一つの元Aを固定して$x=\overrightarrow{AX}$，$y=\overrightarrow{AY}$とおく。直線QにおけるArchimedesの公理より，Q上の有限個の点$A_1,\cdots,A_n$をとって，線分$A_iA_{i+1}(i=0,\cdots,n-1$，但し$A_0=A$とする）が線分$AX$に合同で，$Y$が$A$と$A_n$の間にあるようにできる。$A\leqq Y$だから，$A\leqq A_n$。よって，$A_i\leqq A_{i+1}$ $(i=0,\cdots,n-1)$としてよい。このとき$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\overrightarrow{AX}$で、$x\times n=\overrightarrow{AX}\times n=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{AA_n}=y+\overrightarrow{YA_n}$。$Y\leqq A_n$だから$\overrightarrow{YA_n}>0$。よって$x\times n>y$。

3.3.2　量（体系）の，量直線への埋め込み

任意の量（体系）Q＝（Q，D，$\mathcal{N}$）は，量直線Q_L＝（Q_L，D_L，$\mathbb{R}$）の中に埋め込むことができる。

稠密なQの場合には，先ず，Qの異なる二元$O<U$とQ_Lの異なる二元$O_L<U_L$を固定する。但し，Qが最小元をもつ場合には，最小元をOにとる。$\overrightarrow{OU}\in D^{+}\setminus\{0\}$，$\overrightarrow{O_LU_L}\in D_L{}^{+}\setminus\{0\}$をそれぞれ$u$，$u_L$とおく。そして$\mathcal{N}$の$\mathbb{R}$の中への相似同型$\phi$（§3.1.2）に対して，Dから$D_L$への写像$f$と，Qから$Q_L$への写像$F$を，それぞれつぎのように定義する：

$$f: x=u_\times\xi\longmapsto u_L\times\phi(\xi)$$
$$F: X=O_+x\longmapsto O_L+f(x).$$

Fは即ち，各$X\in Q$を$\overrightarrow{OU}:\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{O_LU_L}:\overrightarrow{O_LX_L}$であるような$X_L\in Q_L$に対応させる写像である。

このとき，fはD，D_Lの順序加法群の構造に関して単射同型であり，しかも正元を正元に対応させる。また，FはQ，Q_Lの順序構造に関する単射同型である。

離散なQの場合には，Oに対して次に大きい元をUにとり，$\mathcal{N}=\mathbb{Q}$の$\mathbb{R}$の中への包含写像をϕにとる。そしてこのときにも，稠密の場合と同様の結果が得られる。

3.4　Q＝D，D^{+}の場合

ある量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）に在るD，$\mathcal{N}$の対から，二つの量（体系）（D，D，$\mathcal{N}$），（D^{+}，D，$\mathcal{N}$）が定義できる。

即ち，Q′＝Dの（Q′，D，$\mathcal{N}$）においては，外算法$+$：Q′×D⟶Q′をDの加法＋そのものとし，Dの順序構造と位相構造（初めのQから導かれるもの）をQ′に考える。ま

た，（D^+，D，$\mathcal{N}$）については，いまの（Q′，D，$\mathcal{N}$）の構造の制限を考える。

“ベクトル量とアフィン量”という枠組みが示されることがあるが，われわれはこれを採らない。この言い方を用いれば，われわれの量は須くアフィン量である。一方，“ベクトル量”は，上述の量（体系）（D，D，$\mathcal{N}$）における第１因子のDと第２因子のDの同一視から出て来る。しかし，同一視するよりは，区別しておく方が賢明である。例えば，“４０km／hの自動車と６０km／hの自動車”と言うときの４０km／hと６０km／hについては，その間に加法を考えることは意味をなさない。両者の間に考え得るものは，大小関係と差のみである。そしてこのことは，第１因子のDによって説明できる。

3.5　１次元実線型空間の量（体系）化

$\mathcal{N}$を実数体$\mathbb{R}$の部分体，Dを体$\mathcal{N}$上の１次元線型空間とする。

いま$\mathcal{N}$に$\mathbb{R}$の順序構造の制限を考える。そして$u \in D^* = D \setminus \{0\}$ を一つ固定して、$D^+ = \{u \times \xi \mid \xi \in \mathcal{N}^+\}$　（$\mathcal{N}^+$は$\mathcal{N}$の正元全体）とおく。このとき，D^+は加法群Dの部分半群で，$D^+ \cap D^- = \{0\}$，$D = D^+ \cup D^-$。（ここで，$D^- = \{-x \mid x \in D^+\}$）。よって，D，$\mathcal{N}$は，量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）に在るD，$\mathcal{N}$の条件（§3.1）を満たしている。特に，このD，$\mathcal{N}$から量（体系）（D，D，$\mathcal{N}$）ないし（$D^+$，D，$\mathcal{N}$）が導かれる（§3.4）。

このように，“量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）の中の（D，$\mathcal{N}$）”の概念と“実数体$\mathbb{R}$の部分体$\mathcal{N}$上の１次元線型空間D”の概念の間には，差がない。こうしてわれわれは，小島(ch.1,(註2)［１］,［２］）による“１次元実線型空間としての量”の概念に到達する。

4　数

4.1　量の比・倍としての数

量（体系）Q＝（Q，D，$\mathcal{N}$）に応ずる$\mathcal{N}$に，われわれは“数”の一つの(註1)意味（身分）を見ることにしよう。$\mathcal{N}$の要素はDの二要素の比ないし倍関係と読まれるから，われわれはここで，数を量（要素）の関係概念の“比・倍”として解釈するという Eudoxos（408?-355? B.C）以来の伝統的立場(註2)を踏襲しているわけである。

なお，（構造）同型な量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$），（Q′，D′，$\mathcal{N}'$）に対しては，同型$\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}'$を介して，$\mathcal{N} = \mathcal{N}'$と見なしていく。

（註１）　この他のものとして，“代数的構造としての数”，“量としての数”を，後で概念化していく。但しこれらは，いまの“比・倍としての数”から導かれる（§§4.3,4.4）。

（註２）　ブルバキ，N.：『数学原論』，位相２，「第４章実数」の「歴史覚え書き」(pp.171-183)，東京図書，1968,pp.174,175.

4.2　数（要素）の特定

数（要素）の特個的な把捉の問題は，数（体系）の定式化とは別の内容のものである。ここでの問題は，一個の数（要素）が経験的・実践的にどのように特定されるかということである。

数（要素）は，ここでは量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）を構成する$\mathcal{N}$の元であり，それはDの二元に関する倍関係である。そして数（要素）の特定は，倍関係としてのそれを操作的（構成的操作的）に記述し，またこれに一つの名を与える，というようになされる。

この〈特定〉の行為は有限である。数（要素）の特個的な把捉は，あくまでも経験的な特個的事実にとどまる。そこで，“数（要素）の特定”の問題は，唯一《われわれはいまどのような数（要素）をどのような仕方で特定し，そしてどのように命名しているか》という形のものになる。

以下は，数（要素）――$\mathcal{N}$の要素――の特個的な把捉の例である。

例．（１）　量（要素）$a \in D^*$に対するaのn回の累加$a \times n$（nは“n”と命名されている自然数）の比が特定され，“n”と命名される(註)。このようにして定義される数を自然数と呼ぶ。

（２）　“n”と命名された自然数nと$a \in D^*$

に関する比a：$((-a)\times n)$を，“$-n$”と命名する。このようにして定義された数と自然数をあわせて，整数と呼ぶ。

（3）　m，nをそれぞれ“m”，“n”と命名された整数とする。但し$m\neq 0$。つぎのような関係にある$a\in D^*$，$b\in D$に対する数$a:b$は“$\frac{n}{m}$”と命名される：

$$a\times n=b\times m.$$

（同じこととして，aとbの公約量cで

$$a=c\times m,\ b=c\times n$$

となるものがとれる。）

（4）　名“p”が与えられている数との積が1（1の名は“1”）になる数は，“p^{-1}”の名が与えられる。

（5）数αに“p”の名が与えられているとき，αのn回（nは“n”と命名されている自然数）の累乗としての数には“p^n”の名が与えられる。

（6）　円の半径の長さrと周の長さsに対し，数 $r\times 2$：sは“π”と命名される。

（註）　“n回の累加”というときの“n”は，序列（数列）0，1，2，3，・・・・の要素である。このnと比としてのnを区別すること。

4.3　代数的構造としての数

われわれは先に，量（体系）$\mathcal{Q}=(Q,D,\mathcal{N})$に応ずる$\mathcal{N}$を“数”と読むことにした。いまこの$\mathcal{N}$に，それの代数的構造のみを考えることにする。そして，$\mathcal{N}$に含まれる$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，また$\mathcal{N}^+$とこれに含まれる$\mathbb{N}$，$\mathbb{Q}^+$のそれぞれに，$\mathcal{N}$の代数的構造の制限を考える。ここで，$\mathcal{N}$には$=\mathbb{R}$の場合があることに注意しよう。したがってここに，代数的構造としての$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}^+$一般と，$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^+$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}^+$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}$が出揃うことになる。

4.4　量としての数

4.4.1　量としての数

数$\mathcal{N}$（特に，$\mathbb{R}$）とこれに含まれる$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，そして$\mathcal{N}^+$（特に，$\mathbb{R}^+$）とこれに含まれる$\mathbb{N}$，$\mathbb{Q}^+$のすべては，量（体系）として表現することが可能である。

先ず，$Q=D=\mathcal{N}$とする。Dに$\mathcal{N}$の加法群の構造を考え，Qの元Xに対するDの元xの作用$X+x$を$\mathcal{N}$の元同士の和として定義し，そしてDの元xに対する体$\mathcal{N}$の元ξの作用$x\times\xi$を$\mathcal{N}$の元同士の積として定義する。

さらに，Q，Dに$\mathcal{N}$の順序構造を考え，$\mathcal{N}$の開区間全体が生成する$\mathcal{N}$の位相構造をQにおいて考える。

このとき，$\mathcal{N}=(Q,D,\mathcal{N})$は§3.1で述べた量形式を備えることになる。そしてこの意味で，われわれは$\mathcal{N}$を量（体系）として考えることができる（註）。

そこで，残りの$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}^+$，$\mathbb{Q}$，$\mathcal{N}^+$の場合であるが，これらに対しては量（体系）$\mathcal{N}=(Q,D,\mathcal{N})$の構造の，それぞれ$\mathbb{N}=(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$，$\mathbb{Z}=(\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$，$\mathbb{Q}^+=(\mathbb{Q}^+,\mathbb{Q},\mathbb{Q})$，$\mathbb{Q}=(\mathbb{Q},\mathbb{Q},\mathbb{Q})$，$\mathcal{N}^+=(\mathcal{N}^+,\mathcal{N},\mathcal{N})$への制限を考える。各々がこれによって量（体系）の形式をもつことになるのは，明らかである。

なお，量（体系）$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$は離散で，その他は稠密。また，$+$に定義されない場合が起こるのは$\mathbb{N}$で，$\times$に定義されない場合が起こるのは$\mathbb{N}$と$\mathbb{Z}$である。

（註）　“量の構成”という観点（ch. 2）から量としての数$(\mathcal{N},\mathcal{N},\mathcal{N})$を述べるならば，つぎのようになる。ここで，$(\mathcal{N},\mathcal{N},\mathcal{N})$における$\mathcal{N}$の三つの身分が区別できるように，$(\mathcal{N},\mathcal{N},\mathcal{N})=(\mathcal{N}_q,\mathcal{N}_d,\mathcal{N}_n)$とおく。

先ず，$\mathcal{N}_q\times\mathcal{N}_q$の上の同値関係～を

$$(\xi,\eta)\sim(\xi',\eta')\iff\eta-\xi=\eta'-\xi'$$

で定義して（右辺の$-$は$\mathcal{N}$での加法$+$の逆算法（減法）），$D=(\mathcal{N}_q\times\mathcal{N}_q)/\sim$とする。$(\xi,\eta)$の属する同値類を$\eta-\xi$と書くことにして，つぎに加法群$\mathcal{N}=\mathcal{N}_d$を，Dとの間のつぎの1対1対応によってDと同一視する：

$$\xi\longmapsto\xi-0$$
$$\eta-\xi\longleftarrow\!\!\!\shortmid\ \eta-\xi.$$

つぎに，$\mathcal{N}_d^*\times\mathcal{N}_d$の上の同値関係～を

$$(\xi,\eta)\sim(\xi',\eta')$$

$$\Longleftrightarrow \eta/\xi=\eta'/\xi'$$

で定義して（右辺の／は$\mathcal{N}$の乗法×の逆算法（除法)), N＝（$\mathcal{N}_d^{*}\times\mathcal{N}_d$)/～と先ず定める。（$\xi$, η）の属する同値類を$\xi:\eta$と書くことにして，つぎに体$\mathcal{N}=\mathcal{N}_n$を，Nとの間のつぎの１対１対応によってNと同一視する：

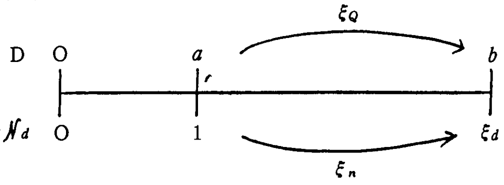
$$\xi \longmapsto 1:\xi$$
$$\eta/\xi \longleftarrow\!\shortmid\ \xi:\eta.$$

4.4.2　数＝［量の比］と，［数＝量］の比

量（体系）Q＝（Q，D，$\mathcal{N}$）で，Dの二元$\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{b}$に対する比$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$とは，$\boldsymbol{a}\times\xi=\boldsymbol{b}$となる$\xi\in\mathcal{N}=\mathcal{N}_Q$のことであった。いまこの$\xi$を，量としての数$\mathcal{N}$＝（$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$）＝（$\mathcal{N}_q$，$\mathcal{N}_d$，$\mathcal{N}_n$）の$\mathcal{N}_n$の要素と読んでみよう——即ち，或る$\alpha$，$\beta\in\mathcal{N}_d$に対する比$\alpha:\beta$として。ところで$\xi=\alpha:\beta=1:\xi$である。但し，右辺の$\xi$は$\mathcal{N}_d$の要素と読む。

よって，この段階で，三種類のξが揃った。$\mathcal{N}_Q$の要素としてのξ，$\mathcal{N}_n$の要素としてのξ，そして$\mathcal{N}_d$の要素としてのξの三つである。いまこれらを順にξ_Q，ξ_n，ξ_dと表わしておく。

このとき，《$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=\xi_Q$》の表現は当然であるが，《$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=1:\xi_d$》ないし《$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=\xi_n$》の表現が為されることがある。二番目の等式は，《$\boldsymbol{a}$を１と見るとき$\boldsymbol{b}$は$\xi$》と読まれる。しかし，この等式の忠実な読みは，《同型$\mathcal{N}_Q\simeq\mathcal{N}_n$で$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$と$1:\xi_d$が対応する》，である。三番目の等式は，$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=1:\xi_d=\xi_n$の第２項が省略されたものである。



なお，《ξの異なる身分》ということで，いまは読み（解釈）の別を述べたわけである。《異なる身分にもかかわらず外見上区別できない》ということを述べたのではない。

4.4.3　“数直線”

数$\mathcal{N}$は，量（体系）として見ることによって，§3.2.2で述べたように，量直線に埋め込まれる。そして$\mathcal{N}=\mathbb{R}$の場合には，この埋め込みは実は全射である。“数直線”とはこのときの量直線のことである。

なお，$\mathcal{N}$の量直線への埋め込みの制限として，$\mathcal{N}$の部分の$\mathcal{N}^{+}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}^{+}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}$それぞれの量直線への埋め込みが導出できる。

4.5　数の身分

われわれは，存在（現象）としての数に，これまで三つの身分を見てきた。即ち，量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）の中の$\mathcal{N}=\mathcal{N}_Q$，代数的構造，そして量としての数である。このうち，数が自存できるのは，〈代数的構造〉の身分においてである。

$\mathcal{N}_Q$は，〈Dの作用域〉の身分であることによって，自存していない。また，量としての数は，異なる身分の数の組（triple）であって，もともと数の単一の身分の名ではない。

量としての数（$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$）に顕われている数$\mathcal{N}$の異なる三つの身分は，上に述べたのとはまた別の“身分”である。再び（$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$）＝（$\mathcal{N}_q$，$\mathcal{N}_d$，$\mathcal{N}_n$）とおいて，$\mathcal{N}$のこの三つの身分が区別できるようにしておこう。

（$\mathcal{N}_q$，$\mathcal{N}_d$，$\mathcal{N}_n$）については，つぎのような算法が定義されている：

$\mathcal{N}_q$と$\mathcal{N}_d$の間の外算法$_+$，
$\mathcal{N}_d$の加法＋，
$\mathcal{N}_d$と$\mathcal{N}_n$の間の外算法$_\times$，
$\mathcal{N}_n$の加法＋，
$\mathcal{N}_n$の乗法×．

このうち，$_+$と$\mathcal{N}_d$の加法＋と$\mathcal{N}_n$の加法＋は，数の加法＋の三様の解釈となり，$_\times$と×は，数の乗法×の二様の解釈となる。

例えば，数直線の身分は$\mathcal{N}_q$であり，その上の二数＝二点を足したり掛けたりすることは，事実ナンセンスである。しかし，数直線の点を（平行）移動する意味での二数の足し算は，意味をもつ。但し，この足し算は，数直線とそれの併進空間の間の外算法である。

数直線の併進空間の身分は$\mathcal{N}_d$である。そしてこれの元としての二数は，平行移動の合成の

意味で足すことができる。しかし，掛けること——例えば，（平行移動）２×（平行移動）３＝（平行移動）６——は意味をもたない。また，数直線の点としての数に，平行移動としての数を掛けることも，意味をもたない。

平行移動を倍することとしての二数の掛け算は意味をもつ。しかし，足し算——例えば，（平行移動）２＋（倍）３＝（平行移動）５——は，意味をもたない。

平行移動の倍全体は，$\mathcal{N}_n$の身分で捉えられる。実際，倍同士を足すことと掛けることは，意味をもつ。しかし，数直線の点としての数に倍としての数を足したり掛けたり——例えば，（点）２＋（倍）３＝（点）５，（点）２×（倍）３＝（点）６　——　は，意味をもたない。

数の現象に明確な分類規定の枠をもたらすことができるのは，唯一〈形式〉の観点に立つことによってである。とりわけ，数と量の区別は，〈形式〉による他ない。例えば，“数は量の抽象である”という“生活者的”な言い方に対して，わたしはこれを“数は量の抽象であり得る（一つの局面として）”と言い直す。そしてその説明に，量とは（Q，D，$\mathcal{N}$）であり，（$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$）（あるいはこれの部分）はこれに同型な（Q，D，$\mathcal{N}$）の抽象——モデル——である，という論理を用いる。ところで，このような形の言い方ができるために，正に量ないし数の形式化が先決問題となるのである。

5　量の数値化と量計算

5.1　量の数値表現

量の数値化はつぎの手続きに拠った。先ず，量（体系）Q＝（Q，D，$\mathcal{N}$）において，Dの一つの要素$u \neq 0$を“単位量”の身分で固定する。そして各$x \in$Dに対し，数u：xの名をそのままxの名（数値）とする。

さらに，Qの一つの要素Oを“基準ゼロ”の身分で固定する。そして，$x \in$Dに対し，xの名（数値）をそのままQの要素$O_{+}x$の名（数値）とする。

また，量の数値化を逆に辿るのが，数値（表現）からの量の再現である。

なお，上に述べた量の数値化（量の書き方）／量の再現（量の数値表現の読み方）の論理は，〈論理〉という形ではわれわれの意識に上ってくるようなものではないが，つぎのような場合にはわれわれの意識に顕在化してくる。即ち，（生活上の便利のために）複数個の単位量ないし基準ゼロを固定的に用意しておき，場合に応じて使い分けていくということが発想されたとき；あるいは，単位量ないし基準ゼロの変換を随意的に行なうということが発想されたときである。

5.2　量の積

5.2.1　量の積

これまでに量計算として出てきたものは，量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）内における算法，即ち，外算法$_{+}$：Q×D⟶Q，Dの内算法（加法）＋，外算法$_{\times}$：D×$\mathcal{N}$⟶D，そして$\mathcal{N}$の内算法＋（加法），×（乗法）である。本節では新たに，二つの量（体系）（Q_1，D_1，$\mathcal{N}_1$），（Q_2，D_2，$\mathcal{N}_2$）間の計算である〈積〉を取り上げる。

量の積は，既に小島，田村（ch. 1，（註2））によって論じられているが，ここでは，これをわれわれの枠組みに即した形に述べ直すとする。

量（体系）（Q_1，D_1，$\mathcal{N}_1$），（Q_2，D_2，$\mathcal{N}_2$），（Q，D，$\mathcal{N}$）について，$\mathcal{N}_1$，$\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$であるとする。複比例関数$f$：$D_1 \times D_2$⟶Dは，$D_1$と$D_2$の積と呼ばれる。また，$x_1 \in D_1$と$x_2 \in D_2$に対して，$f(x_1, x_2) \in$Dは$x_1$と$x_2$の積と呼ばれる。

量（体系）（Q_1，D_1，$\mathcal{N}_1$），（Q_2，D_2，$\mathcal{N}_2$）について$\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$であれば，対（$D_1$，$\mathcal{N}_1$），（$D_2$，$\mathcal{N}_2$）からは，また，量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）（Q＝D）と複比例関数：$D_1 \times D_2$⟶D（全射）が以下のように構成される。

先ず，$\mathcal{N} = \mathcal{N}_2$とする。

$D_1 \times D_2$上の同値関係〜[註1]をつぎのように定義する：

（x_1，x_2）〜（y_1，y_2）とは，（x_1，x_2），

$(y_1, y_2) \in (D_1 \times D_2) \setminus (D_1^{*} \times D_2^{*})$
であるか，そうでなければ，$x_1 : y_1 = y_2 : x_2 \in \mathcal{N}_1$ $(\subset \mathcal{N}_2)$ のこと．

そして，商集合 $(D_1 \times D_2)/\sim$ を $D_1 \otimes D_2$ と書き，$(x_1, x_2) \in D_1 \times D_2$ を代表元とする同値類を $x_1 \otimes x_2$ と書く（“テンソル積”）。また，$(D_1 \times D_2) \setminus (D_1^{*} \times D_2^{*})$ は一個の同値類であるが，これを0で表わす。

この $D_1 \otimes D_2$――Dとおく――に対して，それの内算法（加法）＋をつぎのように定義する(註2)：

$$x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes y_2 = x_1 \otimes (x_2 + y_2).$$

この＋に関してDは可換群になる――0が単位元（零元）で，$-(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes (-x_2) = (-x_1) \otimes x_2$ (註3)。なお，

(♯) $x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes x_2 = (x_1 + y_1) \otimes x_2$

である(註4)。

外算法× ：$D \times \mathcal{N} \longrightarrow D$ をつぎのように定義する(註5)：

$$(x_1 \otimes x_2) \times ((x_1 : y_1) \times (x_2 : y_2)) = y_1 \otimes y_2 \quad (x_1 \in D_1^{*},\ x_2 \in D_2^{*})$$

$$0 \times \xi = 0 \quad (\xi \in \mathcal{N}).$$

Q_1，Q_2 がともに離散のときには，$\mathcal{N} = \mathbb{Q}$ である。そして，$u_i \in D_i$ に対し $D_i = \{u_i \times n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $(i=1,2)$ であるとき，$u = u_1 \otimes u_2 \in D$ に対し，$D = \{u \times n \mid n \in \mathbb{Z}\}$。

Q_1，Q_2 のいずれか一方が稠密であれば，×はいたるところで定義されることになる(註6)。さらに，Dは体 $\mathcal{N}$ 上の1次元線型空間となる(註7)。

したがって，$(D, D, \mathcal{N})$ は量（体系）になる（§3.5）。そしてこれは，Q_1，Q_2 がともに離散のときは離散，Q_1，Q_2 のどちらかが稠密のときは稠密，というようになる。

つぎに，標準写像（can.）：$D_1 \times D_2 \longrightarrow (D_1 \times D_2)/\sim\, = D_1 \otimes D_2$。これは，×の定義より複比例関数である。

また，任意の複比例関数 $f : D_1 \times D_2 \longrightarrow E$ からは，同型 $\phi : D_1 \otimes D_2 \longrightarrow f(D_1 \times D_2)$ が下の図式を可換にするものとして導かれる(註8)――この意味で，量の積は“テンソル積”の概念で捉えられる：

$$\begin{tikzcd}
D_1 \times D_2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{can.}"'] & & f(D_1 \times D_2) \\
& D_1 \otimes D_2 \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

例．　任意の量（体系）$(Q, D, \mathcal{N})$ について，外算法× ：$D \times \mathcal{N} \longrightarrow D$ は，量（体系）$(Q, D, \mathcal{N})$ と量（体系）$(\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathcal{N})$ の間のテンソル積と見なせる――$x \times \xi = x \otimes \xi$。

より一般的に(註9)，量（体系）$(Q_1, D_1, \mathcal{N}_1)$，$(Q_2, D_2, \mathcal{N}_2)$ $(\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2)$ と比例関数：$D_1 \rightarrow D_2$ の全体 $D = \mathrm{Hom}(D_1, D_2)$ から量（体系）$(D, D, \mathcal{N}_2)$ が導かれるが，このとき関数：

$(x, f) \longmapsto f(x)$ 　 $((x, f) \in D_1 \times D)$

は $(Q_1, D_1, \mathcal{N}_1)$ と $(D, D, \mathcal{N}_2)$ の間のテンソル積と見なせる――$f(x_1) = x_1 \otimes f$。

（註1）　同値関係～のイメージは，稠密量 Q_1，Q_2 に対しては，面積相等な二つの長方形 t，t' についての t のタテとヨコの長さと t' のタテとヨコの長さの関係であり，離散量 Q_1，Q_2 に対しては，個数相等な二つの方陣 t，t' についての t の行，列の数と t' の行，列の数の関係である。但しここでの同値関係～は，離散量と稠密量の組に対しても適応するものになっている。

（註2）　これの“well-defined”について確かめるべきことは，$x_1 \otimes x_2 = x_1' \otimes x_2'$，$x_1 \otimes y_2 = x_1' \otimes y_2'$ から $x_1 \otimes (x_2 + y_2) = x_1' \otimes (x_2' + y_2')$ が導かれること。

（註3）　加法＋が $D = D_1 \otimes D_2$ 上いたるところで定義されることと，結合法則を満たすことの二点が，問題である。

（1）第一点については，$D_1 \otimes D_2$ の任意の二元 x，y が $x = x_1 \otimes x_2$，$y = x_1 \otimes y_2$ の形に揃うということが，示すべきことである。

先ず，Q_1 が離散の場合。$u_1 \in D_1$ があって，D_1 の任意の要素 x_1 は u_1 の整数倍で書ける。そこで $(u_1 \times m) \otimes x_2 = u_1 \otimes (x_2 \times m)$ (m：整数) の変形を考える。

つぎに Q_2 が稠密の場合。$D_1 \otimes D_2$ の二元 $x_1 \otimes$

$x_2, y_1 \otimes y_2$に対し, $x_1 : y_1 = \xi$ とおくと, $y_1 \otimes y_2 = (x_1 \times \xi) \otimes y_2 = x_1 \otimes (y_2 \times \xi)$.

最後に，Q_1が稠密でQ_2が離散の場合。$\mathcal{N}_2 = \mathbb{Q}$ だから$\mathcal{N}_1 = \mathbb{Q}$，そこで上の$\xi$は$\frac{n}{m}$ (m，n：整数) と書ける。このとき，$x_1 \times \frac{1}{m} = y_1 \times \frac{1}{n}$。また，$x_1 \otimes x_2 = (x_1 \times \frac{1}{m}) \otimes (x_2 \times m)$，$y_1 \otimes y_2 = (y_1 \times \frac{1}{n}) \otimes (y_2 \times n)$。

（2）　つぎに，x，y，$z \in D$に対し $(x+y)+z = x+(y+z)$ となることを示す。

先ず，Q_1が離散あるいはQ_2が稠密の場合には，x，y，$z \in D$は，ある$x_1 \in D_1$に対し$x = x_1 \otimes x_2$，$y = x_1 \otimes y_2$，$z = x_1 \otimes z_2$の形に書ける。そしてこのとき，$(x+y)+z = x_1 \otimes (x_2+y_2+z_2) = x+(y+z)$。

そこで，Q_1が稠密でQ_2が離散の場合について。$y \neq 0$として ($y=0$の場合は自明)，$x = x_1 \otimes x_2$，$y = y_1 \otimes y_2$，$z = z_1 \otimes z_2$とする。$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathbb{Q}$であるから，$y_1 = x_1 \times \frac{n}{m}$，$z_1 = x_1 \times \frac{q}{p}$ (m，n，p，q：整数) と書ける。このとき，$x_1 \times \frac{1}{m \times p} = y_1 \times \frac{1}{n \times p} = z_1 \times \frac{1}{m \times q}$。これを$w_1$とおくとき，$x = w_1 \otimes (x_2 \times (m \times p))$，$y = w_1 \otimes (y_2 \times (n \times p))$，$z = w_1 \otimes (z_2 \times (m \times q))$。そして，$(x+y)+z = w_1 \otimes (x_2 \otimes (m \times p) + y_2 \times (n \times p) + z_2 \times (m \times q)) = x+(y+z)$。

（註4）　証明すべきことは，$x_1 \otimes x_2 = v_1 \otimes v_2$，$y_1 \otimes x_2 = v_1 \otimes w_2$のとき $(x_1+y_1) \otimes x_2 = v_1 \otimes (v_2+w_2)$ となること。$x_1 = v_1 \times \xi_1$，$y_1 = v_1 \otimes \eta_1$とすると，仮定から$v_2 = x_2 \times \xi_1$，$w_2 = x_2 \times \eta_1$。これより，$x_1+y_1 = v_1 \times (\xi_1+\eta_1)$，$v_2+w_2 = x_2 \times (\xi_1+\eta_1)$。これは，$(x_1+y_1) \otimes x_2 = v_1 \otimes (v_2+w_2)$ を意味する。

（註5）　$\times$は“well-defined”である。即ち，$x_1 \otimes x_2 = x'_1 \otimes x'_2 \neq 0$，$(x_1 : y_1) \times (x_2 : y_2) = (x'_1 : y'_1) \times (x'_2 : y'_2)$ から，$y_1 \otimes y_2 = y'_1 \otimes y'_2$が導かれる。実際，$x'_i = x_i \times \xi_i$，$y_i = x_i \times \eta_i$，$y'_i = x'_i \times \eta'_i$　($i=1,2$) とすると，仮定より，$\xi_1 \times \xi_2 = 1$，$\eta_1 \times \eta_2 = \eta'_1 \times \eta'_2$。

いま，$\eta_1 \times \eta_2 = \eta'_1 \times \eta'_2 = 0$であれば，$y_1$，$y_2$の一方が0で，$y'_1$，$y'_2$の一方が0。このとき $y_1 \otimes y_2 = y'_1 \otimes y'_2 = 0$。

また，$\eta_1 \times \eta_2 = \eta'_1 \times \eta'_2 \neq 0$のとき，$y'_i = y_i \times \zeta_i$ ($i=1,2$) とする。$\zeta_1 \times \zeta_2 = 1$が証明すべきことである。$i=1,2$について，$y'_i = y_i \times \zeta_i = x_i \times (\eta_i \times \zeta_i)$；一方，$y'_i = x'_i \times \eta'_i = x_i \times (\xi_i \times \eta'_i)$；よって，$\eta_i \times \zeta_i = \xi_i \times \eta'_i$。これより，$(\eta_1 \times \zeta_1) \times (\eta_2 \times \zeta_2) = (\xi_1 \times \eta'_1) \times (\xi_2 \times \eta'_2)$。$\xi_1 \times \xi_2 = 1$，$\eta_1 \times \eta_2 = \eta'_1 \times \eta'_2 \neq 0$より，$\zeta_1 \times \zeta_2 = 1$。

（註6）　証明することは，任意の$x_1 \in D_1^*$，$x_2 \in D_2^*$，$\xi \in \mathcal{N} = \mathcal{N}_2$に対し，$\xi_1 \in \mathcal{N}_1$，$\xi_2 \in \mathcal{N}_2$で，$\xi = \xi_1 \times \xi_2$，かつ$x_1 \times \xi_1$，$x_2 \times \xi_2$が定義されるようなものが存在することである。

Q_2が稠密のときには，$x_2 \times \xi$が定義されるから，$\xi_1 = 1$，$\xi_2 = \xi$とすればよい。

Q_1が稠密でQ_2が離散のときには，$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathbb{Q}$。よって$x_1 \times \xi$が定義されるから，$\xi_1 = \xi$，$\xi_2 = 1$とおけばよい。

（註7）　確かめることは，x，$y \in D$，ξ，$\eta \in \mathcal{N}$に対し，$(x+y) \times \xi = x \times \xi + y \times \xi$，$(x \times \xi) \times \eta = x \times (\xi \times \eta)$，$x \times \xi + x \times \eta = x \times (\xi+\eta)$，$x \times 1 = x$であること。

Q_2が稠密のとき。$x = x_1 \otimes x_2$，$y = x_1 \otimes y_2$とすると，$(x+y) \times \xi = x_1 \otimes (x_2 \times \xi + y_2 \times \xi) = x \times \xi + y \times \xi$。$(x \times \xi) \times \eta = x_1 \otimes ((x_2 \times \xi) \times \eta) = x \times (\xi \times \eta)$。$x \times \xi + x \times \eta = x_1 \otimes (x_2 \times \xi + x_2 \times \eta) = x \times (\xi+\eta)$。$x \times 1 = x_1 \otimes (x_2 \times 1) = x$。

Q_1が稠密でQ_2が離散のとき。このとき$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathbb{Q}$。よって，上と同様に各等式を証明できる。（但し，最初の等式については，加法の定義式の代わりに（#）が用いられる。）

（註8）　先ず，関数$\phi : x_1 \otimes x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$が well-defined であることを確かめる。つぎに，+，×の定義に戻って，$\phi(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$，$\phi((x_1 \otimes x_2) \times \xi) = f(x_1, x_2) \times \xi$を確かめる。

（註9）実際，$\xi \in \mathcal{N}$と

$$\times \xi : x \longmapsto x \times \xi \qquad (x \in D)$$

の同一視によって，$\mathcal{N} = \mathrm{Hom}(D, D)$。

5.2.2　“長さ×長さ＝面積”について

長さ×長さ＝面積の公式の意味は何なのか。このことを改めて考えてみる。

問題は，長さa，bと面積sに関する式"$a\times b=s$"の意味である。"×"とは何のことか，"="の意味は何か。しかし先ず問われるべきは，そもそも"面積"とは何かということである。"面積がsである"というのはどういうことなのか。

"面積"を"長方形の面積"ということで考えることにしよう。ここで，長方形全体の集合をTで表わし，タテの長さがx，ヨコの長さがyの長方形を（x，y）で表わすことにする。

T上の同値関係〜を，つぎのように定義する：

$$(x,\ y)\sim(x',\ y')\Longleftrightarrow x : x' = y' : y.$$

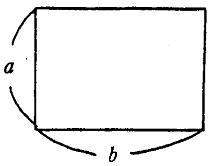
そして長方形の面積（カテゴリー）を商集合T／〜として解釈する。即ち，個々の同値類がそれぞれ一個の面積（要素）を表現しているというように読み，"〜"を"面積が同じ"と読むわけである(註)。

いま，（x，y）を代表元とする同値類を，$[x,\ y]$と書くことにする。このとき，長さa，bと（長方形の）面積sに関する"$a\times b=s$"は，端的に，$(a,\ b)\in s$（$\in$T／〜），即ち$[a,\ b]=s$，のこととして解釈できる。

ここで，量（体系）としての長さQ＝（D^+，D，$\mathbb{R}$）を考える。そして，長方形（Tの元）（x，y）を積$D^{+*}\times D^{+*}$の元と見なす。このとき〜は$D^{+*}\times D^{+*}$上の同値関係であり，これで$D^{+*}\times D^{+*}$を割って得られる商は$D^{+*}\otimes D^{+*}=\phi(D^{+*}\times D^{+*})$（$\phi$は標準写像：$D\times D\longrightarrow D\otimes D$）に他ならない。さらに$D^{+*}\otimes D^{+*}$とT／〜が，対応：$x\otimes y\longleftrightarrow[x,\ y]$の下に同一視できる。

ここまで来ると，長さa，bと面積sに関する式"$a\times b=s$"の意味づけを完了することができる。即ち，それは$a\otimes b=[a,\ b]=s$のことである。

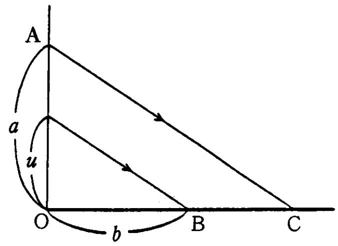
さて，長さaと長さbの積を考えるというときには，いつもつぎの手続きが非明示的に指示されている。即ち，隣り合う二辺の長さがそれぞれa，bである長方形（a，b）を考えること。実際，長さa，bの積"$a\times b$"は，この長方形の面積に等しい――あるいは，この長方形の面積



である――とされる。そして，"長さ×長さ＝（長方形の）面積"の言い回しがされる。

しかし，"長さ×長さ＝（長方形の）面積"の形式的な意味は，この式を左右逆にした，（長方形の）面積＝長さ$\otimes$長さである。実際，長さ$\otimes$長さは《＝（長方形の）面積》の他であり得る。例として，長さ$\otimes$長さ＝長さ――したがって"長さ×長さ＝長さ"――であり得ることを示してみよう。

いま長さ$u\neq 0$を一つ固定する。そして，長さa，bが与えられたとき，隣り合う二辺の長さがa，bの長方形を描くのではなく，つぎのような図を描く：



このとき，$a\times b=OC$の長さ（c）と考える。$(a,\ b)\longmapsto c$は，明らかに複比例関数である。そしてこれは同型：長さ$\otimes$長さ$\longrightarrow$長さを導く。

さて，ここに示した例は"長さ×長さ"とは違うのか。否，ここで示した"長さ×長さ＝長さ"は"長さ×長さ＝面積"と同格である――とわたしは敢て主張しよう。実際，"長さ×長さ＝面積"は，どのようにして主張されたであろうか。与えられた長さa，bに対して，一定のルールに則って一つの図を描く。そしてその図の中の特定の位置に在る幾何学的形象について或る量を見ようとする。それがsであったとする。このとき$(a,\ b)\longmapsto s$が複比例関数であることが"$a\times b=s$"を主張できる事実上の理由になっている。そしてわたしは，この形式を踏んで"長さ×長さ＝長さ"を出したのである。

われわれが"長さ×長さ＝長さ"を採らない

のは，形式的・意味的な不備からではなく，端的に“つまらない”からである。これだけが理由である。

“長さ×長さ＝面積”は命題である。そして，(非明示的に) 既に選ばれている一定の論理に関して，これは命題である。(このことが看過されるとき，“長さ×長さ＝面積”が実在の事実とされてしまう。) そしてこの論理においては，“長さ×長さ＝面積”の意味は，長さ×長さは面積に《なる》ということではない。

われわれは面積を前提して“長さ×長さ”を語っているのである。(実際，“長さ×長さ”が“＝長さ”でもあり得る以上。) 結局，“長さ×長さ＝面積”の意味は何か。それは，長方形の場合，長さ⊗長さが面積の表現（概念化）ないし表現の論理に《なり得る》ということである。即ち，“長さ×長さ＝面積”ではなくて，“面積＝長さ×長さ”なのである。

（註）　面積のこの定義の根拠は，$(x, y) \sim (x', y')$ が《長方形 (x, y)，(x', y') は共通の長方形分割をもつ》を実際含意しているということにある。但し，$x : x' = y' : y = \xi$ が有理数でない場合については，“共通の長方形分割”を極限の意味で考える。即ち，$\xi = \lim \xi_n$，$\xi_n = \dfrac{q_n}{p_n}$ のとき，長方形 $(x \times p_n^{-1}, y \times q_n^{-1})$ を単位とする (x, y) の分割 f_n の列 $\{f_n\}$ が (x, y) と (x', y') の共通の長方形分割を定義するというように（形式的に）考える。

5.3　量の数値計算

5.3.1　数値計算の構造

量計算を，一つの量あるいは複数個の量の組と一つの量との関数的対応：

$$F : Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n \longrightarrow Q_0;$$

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) \longmapsto X_0$$

として捉える——ここで Q_i は量（体系）$(Q_i, D_i, \mathcal{N}_i)$ の中の Q_i $(i = 1, \cdots, n, 0)$。

いま，各 Q_i において基準ゼロの資格で $O_i \in Q_i$ が固定され，各 D_i において単位量の資格で正元 $u_i \neq 0$ が固定されているとする。そしてここで，関数

$$\alpha_i : D_i \longrightarrow Q_i; \quad x \longmapsto O_i + x$$

$$\beta_i : \mathcal{N}_i \longrightarrow D_i; \quad \xi \longmapsto u_i \times \xi$$

を考える。α_i，β_i は双射（全単射）であるから，関数 F はつぎのような具合に，先ず $D_1 \times \cdots \times D_n$ から D_0 への関数 f に，そしてさらに $\mathcal{N}_1 \times \cdots \times \mathcal{N}_n$ から $\mathcal{N}_0$ への関数 ϕ に，移しかえられる：

$$\begin{array}{ccc}
Q_1 \times \cdots\cdots \times Q_n & \xrightarrow{\quad F \quad} & Q_0 \\
\Big\downarrow (\alpha_1 \times \cdots\cdots \times \alpha_n)^{-1} & & \Big\downarrow \alpha_0^{-1} \\
D_1 \times \cdots\cdots \times D_n & \xrightarrow{\quad f \quad} & D_0 \\
\Big\downarrow (\beta_1 \times \cdots\cdots \times \beta_n)^{-1} & & \Big\downarrow \beta_0^{-1} \\
\mathcal{N}_1 \times \cdots\cdots \times \mathcal{N}_n & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \mathcal{N}_0
\end{array}$$

そしてこの F から ϕ への移行が，量計算に数計算がとって代わることの意味である。

ここで，F，f，ϕ として，$n = 2$（二変数）の場合——二項演算——を考える。また，ここでの量計算一般を，二項演算の組合わせになるものとして考えることにする。

二項演算一般は，二つの逆演算を導く。即ち，二項演算○：$x \bigcirc y = z$ に対し，x と z から y を求めるものと，y と z から x を求めるものの二つである。

ここでは二項演算 $f : D_1 \times D_2 \rightarrow D_0$ として，（テンソル）積⊗ないしその二つの逆算法（ともに⊘で表わす）か，あるいは $D_1 = D_2 = D_0 = D$ の場合の D の加法＋ないしその逆算法（減法—— －で表わす）を考える。

⊗の範疇には，量（体系）$(Q, D, \mathcal{N})$，$(Q', D', \mathcal{N}')$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{N}')$ に対する関数：$(x, t) \longmapsto t(x)$ $(x \in D,\ t \in \mathrm{Hom}(D, D'))$，およびこれの特殊と見なせる倍×：$D \times \mathcal{N} \rightarrow D$ が含まれることに，注意しておこう（§5.2.1)。ここでさらに，u が D の単位量と指定され，u' が D′ の単位量と指定されているときには，$D \otimes D'$ の単位量として $u \otimes u'$ が採られ，$\mathrm{Hom}(D, D')$ の単位量として $u' \otimes u^{(註)}$ が採られるものとする。

さて，以上のように条件設定をするとき，F，

f，ϕが定義されるために$\mathcal{N}_1$，$\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_0$でなければならない。このとき，$F$，$f$，$\phi$の表わす量計算は，つぎのようになる。即ち，計算に取り込まれる所与の量$X_i = O_i + (u_i \times \xi_i) \in Q_i$の数値$\xi_i \in \mathcal{N}_i$ $(i=1,2)$を$\mathcal{N}_0$の元の意味に変え，この二つに対し＋，－（＋の逆——減法），×，／（×の逆——除法）のいずれかの計算をして一つの$\xi \in \mathcal{N}_0$を出し，そして$O_0 + u_0 \times \xi \in Q_0$を所期の量として提示する。

量の数値計算は，実際，つぎの式変形の下に進行する：

$$(u \times \xi) + (u \times \eta) = u \times (\xi + \eta),$$
$$(u \times \xi) - (u \times \eta) = u \times (\xi - \eta),$$
$$(u_1 \times \xi) \otimes (u_2 \times \eta) = (u_1 \otimes u_2) \times (\xi \times \eta),$$
$$(u_1 \times \xi) \oslash (u_2 \times \eta) = (u_1 \oslash u_2) \times (\xi / \eta).$$

そしてこれらは，

$$f(u_1 \times \xi,\ u_2 \times \eta) = f(u_1,\ u_2) \times \phi(\xi,\ \eta)$$

として一括される。ここでの$f(u_1,\ u_2)$と$\phi(\xi,\ \eta)$への分解は，量計算における量単位計算と数計算の二つの局面への分解を意味している。また，fの意味の＋，－，⊗，⊘にはそれぞれϕの意味の＋，－，×，／（$\mathcal{N}_0$における）が応じている。そこで，二項演算の組み合せとしての量計算一般が，量単位計算と数計算の二つの —— 〈同型〉な —— 局面への分解という形で，実行できることになる。

（註）　但しここでは，$Q \otimes \mathrm{Hom}(Q,\ Q') = Q'$のように考える。“＝”の意味は，対応：$x \otimes f \leftrightarrow f(x)$である（§5.2.1）。したがって，$u' \oslash u$とは，$u \otimes f = f(u) = u'$なる$f \in \mathrm{Hom}(Q,\ Q')$のこと。

5.3.2　形式の選択

与えられた条件からある量を求める過程は，同時にいくつかの仕方で捉えることが可能である。特に，和，倍，比例関数，複比例関数の形式は，以下に示すように，その間に融通性がある。

先ず，整数倍は累加の見方と置き換わる。

つぎに，比例関数と複比例関数は，倍の見方で代えられる。実際それらは倍の合成の局面へと結局変えられていくものであるから，始めから一挙に倍の見方がとれるならばそうしてよい。

さらに比例関数（特に，倍）の見方は，複比例関数の見方で代えられる。いま，量（体系）$(Q,\ D,\ \mathcal{N})$，$(Q',\ D',\ \mathcal{N})$に関する比例関数$f: D \longrightarrow D'$と量$x \in D$に関する$f(x) \in D'$を求めることが問題になっているとしよう。

DからD'への比例関数全体の集合をQ''で表わし，$D'' = Q''$とする。D''の内算法（加法）＋と，D''の元に対する$\mathcal{N}$の元の作用×を，つぎのように定義できる。即ち，$g,\ h \in D''$，$\xi \in \mathcal{N}$に対し，

$$g + h : x \longmapsto g(x) + h(x)$$
$$g \times \xi : x \longmapsto g(x) \times \xi.$$

さらに，形式上，Q''の元に対するD''の元の作用＋を＋そのものとして定義しておく。このとき，$(Q'',\ D'',\ \mathcal{N})$は一つの量（体系）になる。（例えば，時間と距離の比例関係としての“速さ”。）

ここで，関数$t: D'' \times D \longrightarrow D'$を

$$t:\ (g,\ x) \longmapsto g(x)$$

として定義する。これは複比例関数になる。実際，定義から

$$t(g \times \xi,\ x \times \eta) = (g \times \xi)(x \times \eta)$$
$$= g(x \times \eta) \times \xi = (g(x) \times \eta) \times \xi$$
$$= g(x) \times (\xi \times \eta) = t(g, x) \times (\xi \times \eta).$$

そして，先の$f(x)$を求める問題は，《$(f,\ x) \in D'' \times D$に対して$t(f,\ x)$を求める問題》という，新しい解釈を得ることになる。

例，　“$1\,l$ pkgの液体$q\,l$の重さ”という問題が，和，倍，比例関数，複比例関数のそれぞれの考え方に立つときにどのような形で解かれることになるかを，見ていこう。但し，量（体系）としての容積および重さを，それぞれ$(Q,\ D,\ \mathbb{R})$，$(Q',\ D',\ \mathbb{R})$とする。

1）［和の場合］　これは$q \in \mathbb{N}$の場合において適用される。このとき$q\,l$は$1\,l$のq回の累加であり，そして$1\,l$のq回の累加にはpkgのq回の累

加が併行している。よって，$q\ l$の重さは，pkgのq回の累加になる。（以降は，＝（1 kg×p）＋・・・・＋（1 kg×p）＝1 kg×（p＋・・・・＋p）の計算。）

2）［倍の場合］　$q\ l$は1 lのq倍であり，1 lのq倍にはpkgのq倍が併行している。よって，$q\ l$の重さはpkgのq倍――pkg×q――になる。（以降は，＝（1 kg×p）×q＝1 kg×（p×q）の計算。）

3）［比例関数の場合］　問題の液体について，それの容積と重さが比例関係にあるということの認識から出発する。そしてこの関係を比例関数f：D⟶D′へと読み直すとき，qlの重さである$f(q\ l)$は，fの比例関数としての性質から，＝f(1 l×q)＝f(1 l)×q＝pkg×q.

4）［複比例関数の場合］　先ず，比例関数：D⟶D′の全体　Hom（D，D′）をQ″，D″＝Q″とするとき，（Q″，D″，ℝ）が（先に述べた構造において）Q，Q′と同型の量（体系）であること，そして関数

$$t：D''\times D\longrightarrow D'；\ (f,\ x)\longmapsto f\ (x)$$

が複比例関数であることを，押さえておく。また，問題の液体についてそれの容積と重さとの対応が比例関数になるということを認めておく。

さて，液体$q\ l$の重さは，f(1 l)＝pkgである比例関数f∈　Hom（D，D′）――f＝pkg／l――に対するf（$q\ l$）で求められる。ところで，fは，u（1 l）＝1 kgである比例関数　u――u＝1 kg／l――に対しf＝u×p。そこで1 l pkgの液体$q\ l$の重さが，

$$\begin{aligned} f\ (q\ l)\ &=t\ (\mathrm{pkg}/l,\ q\ l)\\ &=t\ (1\,\mathrm{kg}/l\times p,\ 1\,l\times q)\\ &=t\ (1\,\mathrm{kg}/l,\ 1\,l)\times(p\times q)\\ &=1\,\mathrm{kg}\times(p\times q)\end{aligned}$$

のように計算される。

なお，3），4）が結局は重さの倍――一つの量の倍――という形へもっていくための手続きであることに，改めて注意しておこう。

5.3.3　量の積の面積図式

連続量の積の計算は，面積計算に読みかえることができる。

（Q_L，D_L，ℝ），（Q_A，D_A，ℝ）を，それぞれ量（体系）としての長さ，面積とする。そして，lをD_Lの単位量とし，一辺の長さがlの正方形の面積aをD_Aの単位量に選んでおく。

連続量（Q_i，D_i，ℝ）（i=1,2），（Q，D，ℝ）に関する複比例関数

$$f：D_1\times D_2\longrightarrow D$$

が，D_1，D_2，Dそれぞれの単位量u_1，u_2，uに対し

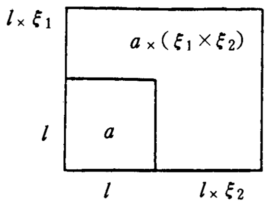
$$f\ (u_1,\ u_2)\ =u$$

となっているとしよう。このとき，D_1をD_Lに，D_2をD_Lに，そしてDをD_Aに，それぞれつぎの要素間対応によって同一視する：

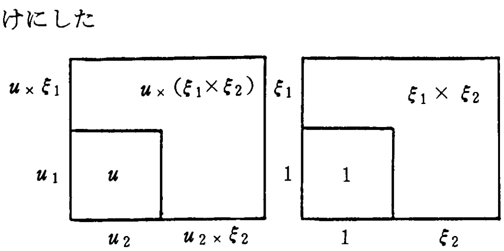
$$\begin{aligned} u_1\times\xi&\longmapsto l\times\xi\\ u_2\times\xi&\longmapsto l\times\xi\\ u\ \times\xi&\longmapsto a\times\xi\end{aligned}$$

さて，$x_1=u_1\times\xi_1\in D_1$と$x_2=u_2\times\xi_2\in D_2$の積$f(x_1,\ x_2)\in D$は数値計算$\xi_1\times\xi_2$で求められるわけであるが，$\xi_1\times\xi_2$は，二辺の長さの数値（$l$に対する）が$\xi_1$，$\xi_2$である長方形の面積の数値（$a$に対する）の計算である。

そこで面積図式



の中の値l, l, a, $l\times\xi_1$, $l\times\xi_2$, $a\times(\xi_1\times\xi_2)$のそれぞれに$u_1$，$u_2$，$u$，$u_1\times\xi_1$，$u_2\times\xi_2$，$u\times$（$\xi_1\times\xi_2$）を重ね書きした，あるいは数値だけにした



が，$x_1=u_1\times\xi_1\in D_1$，$x_2=u_2\times\xi_2\in D_2$およびこれの積$f(x_1,\ x_2)=u\times(\xi_1\times\xi_2)$の関係の表現として成立することになる。