算数科“図形”領域教材研究——“空間”の教材化(1)

宮 下 英 明

On Informal Geometry in Elementary Shool Mathematics —— “Space”(1)

Hideaki MIYASHITA

目　次

1 “空間”の教材化
1.1 “空間”の教材化の理由
1.2 “空間の明示”の主題の内容
1.3 “空間”を主題化する単元

2 “同型”の認識——“空間”の概念化の契機として
2.1 “同型”の認識
2.1.1. 対象の”同型”から“空間”の概念へ
2.1.2 認識タイプとしての“同型”
2.1.3 身体性としての，“同型”の認識
2.1.4 対象の同一視としての，“同型”認識
2.2 “同型”の判定における，実践と論理
2.2.1 実践と論理
2.2.2. 実践としての証明
2.3 “同型”の規準
2.3.1 規準の作為
2.3.2 規準への判断の従属
2.4 “空間”の概念化による“同型”の数学的定式化
2.4.1 〈見え〉の同型
2.4.2 空間の部分の同型
2.4.3 同型写像
2.4.4 同型写像の，空間への拡張
2.4.5 自己同型写像
2.5 単本複体の絵の同型
2.5.1 単体複体の絵の同型
2.5.2 単体複体の絵

3 合同——“合同”の数学的定式化
3.1 “合同”の規準
3.2 “合同”の数学的定式化
3.2.1 等長写像
3.2.2 等長写像の，空間への拡張
3.2.3 等長変換
3.3 単体複体の絵の合同
3.3.1 単体複体の絵の合同
3.3.2 “多角形の合同条件”

4 相似——“相似”の数学的定式化
4.1 “相似”の規準
4.2 合同への還元
4.3 “相似”の数学的定式化
4.3.1 相似写像
4.3.2 相似写像の，空間への拡張
4.3.3 相似変換

平成元年9月16日受理

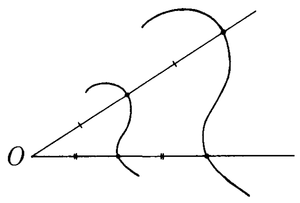
4.3.4 相似拡大，“相似の位置”
4.4 単体複体の絵の相似
4.4.1 単体複体の絵の相似
4.4.2 “多角形の相似条件”
5 対称
5.1 “対称”の概念
5.2 “対称”の認識
5.3 “対称”の数学的定式化
5.3.1 空間の二点に関する対称
5.3.2 “二点の中点”の意義
5.3.3 点対称
5.3.3.1 点対称の概念を導入できる空間
5.3.3.2 例
5.3.4 ユークリッド空間における対称
5.3.4.1 部分空間に関する対称
5.3.4.2 超平面対称
5.3.4.3 2次元ユークリッド空間における“線対称”
5.3.5 座標による対称の表現
5.3.6 対称変換
5.3.7 空間の部分に関する“対称”の概念
5.3.7.1 対称な二つの部分
5.3.7.2 自己対称
5.4 等長変換としての対称変換
5.5 “基本図形”における“対称”
5.5.1 “基本図形”の対称の特徴づけ
5.5.2 多角形の対称軸
5.5.3 線対称三角形，線対称四角形
5.5.4 底辺指定の多角形の“線対称”
5.5.5 底辺指定の三角形，四角形における線対称

1 “空間”の教材化

1.1 “空間”の教材化の理由

“図形”指導で図を扱う場合，それの多くは，空間の部分としての扱いである。

例えば，“正三角形”。これの概念は，計量をもつ空間に対して成立する。空間なしには“正三角形”は存在しない。また，与えられた図$\mathscr{X}$に相似な図$\mathscr{Y}$の作図：



これは一つの空間の上の事態である。空間なしには“相似”はない。

しかし，図を空間の部分として現に扱っていながら，空間に明示されることがない――これは現行の“図形”指導における一つの問題点である(註)。

教師が子どもに空間を明示しないということは，子どもに空間を意識させないということと同じである。

（註）本論では，つぎのような形で“空間の明示”を問題化することは，いまはしない：《空間は明示した方がよいのか，しない方がよいのか；明示すべきなのか，すべきでないのか》。われわれはつぎのことを考えていく：《空間の明示はどのような形で行なうことによって，どこまで可能か》。

1.2 “空間の明示”の主題の内容

“空間の明示”の主題の内容になるのは，つぎのようなことである。

・対象表現を“対象の絵を描く”というように考えるとき，絵の描かれるキャンバスの一つが“空間”であること．そして，絵の指定は，

空間の部分の特定という形で為されること。

・対象とそれの絵を，存在として区別すること。

・“空間”の意味としての“構造をもつ(点)集合”。

・空間の構造を記述する概念. 空間の要素(点)，部分を記述する概念. 空間の要素(点)，部分の関係を記述する概念。

・対象を空間の部分に表現する実践（対象の絵を描く実践)。

・空間の部分への対象表現を，対象の〈疎外(別モノ化)〉として認識すること。

1.3 “空間”を主題化する単元

われわれは，現行の算数教材の中の“合同”，“対称”，“相似”の各単元において，“空間”，“空間の変換”の主題化を試みることにする。

実際，“合同”，“対称”，“相似”を（所謂“基本図形”に対してではなく）絵一般に対して主題化しようとするとき，これは必然的に“空間の変換”の主題化になる。

“合同の単元では，“合同”を“等長（合同）変換”として主題化する。即ち，合同は，

《点 X，Y にそれぞれ点X'，Y'が対応するときの，対（X，Y）と対（X'，Y'）の間に成立しているきまり——$\overline{XY}=\overline{X'Y'}$》

という形で主題化される。

“対称”の単元では，“対称”を“対称変換”として主題化する。即ち，対称は，

《対応する二点 X，X'の間に成立しているきまり——点対称のときは，点 O が存在して，O は任意の点 X に対して X と X'の中点；線対称のときは，直線 L が存在して，L は任意の点 X に対して線分 XX'の垂直二等分線》

という形で主題化される。

さらに，対称変換を合同変換の特殊として押える。

“相似”の単元では，“相似”を“相似変換”——“距離の比を保存する変換”の意味で——として主題化する。即ち，相似は，

《点X_1，X_2，Y_1，Y_2にそれぞれ点 X_1'，X_2'，Y_1'，Y_2'が対応するときの，対((X_1，Y_1)，(X_2，Y_2))と対((X_1'，Y_1')，(X_2'，Y_2'))の間に成立しているきまり——$\overline{X_1Y_1}\times\xi=\overline{X_2Y_2}\Rightarrow\overline{X_1'Y_1'}\times\xi=\overline{X_2'Y_2'}$》

という形で主題化される。

さらに，等長変換を相似変換の特殊として押える。

2.1 “同型”の認識——“空間”の概念化の契機として

2.1.1 対象の“同型”から“空間”の概念へ

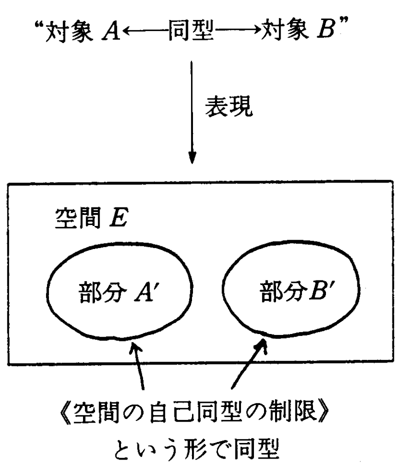
“合同”，“相似”の認識を一般的に述べれば，“同型”の認識ということになる。よって，“合同”，“対称”，“相似”の単元において前節に述べる形で“空間”を導入するやり方は，《“同型”の認識を契機として“空間”が概念される》という発想に立つやり方ということになる。

そして実際，“空間”の概念化を《“同型”の認識を契機とするもの》として解釈することは，可能である。即ち，対象の“同型”を説明（記述）する概念装置として“空間”が概念化されることがある，というように。

勿論，“空間”の概念化を“同型”の認識から独立したものとして解釈することも可能である。——例えば，“ユークッド空間”に対する《位置解析のための装置》としての解釈。

また，すべての“同型”の認識が“空間”の概念化につながるというわけではない。——例えば，単体複体の幾何学の契機となる“同型”の認識など。

“同型”の認識は，“同型”が《空間の部分の同型》という形に表現されることで，“空間”の概念化につながる(註)。そしてこのとき，《空間の部分の同型》は，さらに《空間の自己同型（写像）の制限》という形に述べ直される。こうして結局，対象の“同型”は，“空間の自己同型”の概念に帰着させられる。



（註）“合同”，“相似”に対するユークッド空間，アフィン同型に対するアフィン空間，位相同型に対する位相空間，というように。

2.1.2 認識タイプとしての“同型”

“対象の述定を比べる”というタイプの認識に対し，“同型”は，“対象を直接見比べる”というタイプの認識である。例えば《二つの対象はともに三角形，よって同類》の認識は，前者である。

“同型”による類化・類別は，対象の述定を要しない。そこで，述定を持たない対象，ないし適切に述定することが困難な対象——例えば，自由曲線——については，類化・類別を“同型”で実現するということになる。“同型”によって，述定を持たない対象にも類化・類別の主題が立つ。

“同型”は，《対象の要素対応で，しかじかの条件を満たすものがとれる》という形に定式化される。対象にこの定式化された“同型”を適用するためには，先ずその対象をこの“同型”概念が属する論理系の対象に表現(〈疎外〉)しておく必要がある。

2.1.3 身体性としての，“同型”の認識

“同型”が主題になる前提として，“同型”が見えてしまうということ，あるいは，人に言われれば“同型”が見えてくるということが，なければならない。即ち，“同型”の認識がひとの身体性としてあるのでなければならない。

この身体性を理由づけることはできない——理由づけが恣意の他ではないという意味で(註)。われわれが言い得ることは，《われわれが“同型”と見る二つの対象の間には，しかじかの関係が成立している；逆に，しかじかの関係がその間に成立している二つの対象を，われわれは現実に“同型”と見てしまう》ということだけである。

（註）例えば，〈“相似”の認識〉に対するわたしのつぎのような理由づけは，わたしの恣意である：《何故“相似”が認識されるか？存在の同一性の判断にそれが関わっているからである。ヒトが生活する上で，同一物は，近くにあっても遠くにあってもそれと認めなければならない——そうでなければ，ヒトであることが破綻する。さてわれわれは，近くにあるそれと遠くにあるそれとを同じ見るという事態を，或る場合においては，“形”のことばを用いて，即ち，“形が同じであることから同一物と判断する”という言い方で，述べる。そしてこのときの“形が同じ”は，数学の概念では，“相似”である。》

2.1.4 対象の同一視としての，“同型”認識

“同型”の認識には，対象の同一視の意義が込められている。実際，対象の同一視は“見かけは違うがもともと一つ”の認識であり，そして“もともと一つ”の認識を支える根拠の表現が，対象の“同型”になる。

“対象の同一視”というときの“同一視”の意味は色々である。

“同一視”は，“二つの対象は価値が同じである故にもともと一つ”という形の認識である(註)。そこで，この場合の“価値”の色々が“同一視”の色々になる。

（註）“二つの対象は価値が同じである故にもともと一つ”の言い回しにおいて，“対象”とは意識の

対象のことである。では，“もともと一つ”とされたところのものは何なのか。それも意識の対象である他ない。そしてそれは，上の言い回しの中の“価値”と同じであるとしなければならない。“対象の同一視”とは，実は“一つの価値とそれの複数の異なる表象”を主題化する言い回しに他ならない。

なおこのときの“価値”の語は“存在”の語と置換可能である。実際，単一“存在”は単一“価値”で説明されるのみである。——例えば，あなたが単一存在であることをあなたはどのように説明するか？

2.2 “同型”の判定における，実践と論理

2.2.1 実践と論理

現前のモノの形に対する“同型”の判断・判定は実践である。このことには真も偽もない。問題になるのは真偽ではなく，この実践が意味をもつかどうか，実効するか否かということである。判断は恣意であり，〈賭け〉である。

“同型”の判断の形を

“これとこれは，同型だから同型”

(問答無用）から

“しかじか$_1$であるこれとしかじか$_2$である

これは，しかじか$_3$であり，ゆえに同型”

に変えることも，判断を恣意から免れさせる意味をもつものではない。実際，ここでしていることは，“同型”の判断の恣意性を“しかじか$_i$”($i=1,2$)の判断の恣意性に帰着させることである。

特に，《帰着させる》論理がこのとき（暗黙に）導入されている。即ち，

“しかじか$_i$であるこれ”($i=1,2$)

を論理的対象とし，

“しかじか$_1$である x としかじか$_2$である y

は，しかじか$_3$であり，ゆえに(註)同型”

を論理的命題とするような論理が，導入されている。

よって，“これ”を論理にのせることが，“これ”を“しかじか$_i$”($i=1,2$) と見なす恣意の本質である。——但し，実践的には，“しかじか$_i$”($i=1,2$) を“しかじか$_3$”を定める過程で併行して調整していくというのが普通であるが。

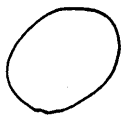
(註) この“ゆえに（含意)”には，同値の場合——即ち，“同型”の定義の場合——も，含まれる。

2.2.2 実践としての〈同型の証明〉

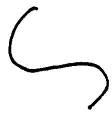
“同型”は“同型写像(対応)の存在”として定義される。

“同型写像の存在”の直接証明は，同型写像を一つ現前させることである。

これに対し，“同型写像の非存在”の証明は，可能な写像がすべて同型写像でないことを示すことである。したがって，可能な写像を実践的にすべて尽くせない場合には，“同型写像の非存在”は，何か別の間接的なやり方で証明する他ない。例えば，同型＝“相似”の場合，同型写像が同相写像であることを用いて，



と



の非同型を結論する，等。

“しかじか$_1$であるこれとしかじか$_2$であるこれ”に対する“同型写像の存在”は，論理的含意の問題である。

“しかじか$_1$であるこれとしかじか$_2$であるこれ”に対して“同型写像が存在する”と《見なす》のではない。同型写像が存在すると見なすことは，同型かどうかが問題にされる“しかじか$_i$であるこれ”($i=1,2$)を定めていることに他ならない。“同型写像の存在”は“しかじか$_i$であるこれ”($i=1,2$)の論理的含意として真か偽かの問題であり，判断の問題ではない。

このように，“しかじか$_1$であるこれとしかじか$_2$であるこれ”に対しては，論理的に，同型／非同型が決まっている。しかし，われわれは，その何れであるかを前以っては知らない。そして これを知ろうとすることは実践である。特に，

同型写像となりそうな写像を定めることは,〈賭け〉以外の何ものでもない。

2.3 “同型”の規準

2.3.1 規準の作為

“同型”を認識する自分への意識を契機として，われわれはつぎに“同型”の規準を作為するようになる。このとき，身体の傾向は，或る規準が対象においてで満足されているときの効果として説明される。

効果の内的プロセスが捉えられたわけではない。《規準の充足》が身体の傾向を顕現させる必要十分条件となるその〈規準〉が，得られたのである。しかしこの規準を得たとき，われわれは“自らの身体の傾向をことばにした”という感じを持つ。――そして実際，われわれが一歩前進したことは確かである。捉えられた“内的プロセス”はフィクションであることを免れないが，対象に関する規準はフィクションではない。

2.3.2 規準への判断の従属

“同型”の〈規準〉が一旦確定されたならば，われわれは以降“同型”を〈規準〉に依って判断するようになる。判断を〈規準〉に従属させる。

そしてこのときには，日常語の“同型”に対立する新しい“同型”――〈規準〉によった“同型”――が起こっていることになる。

二つの“同型”はあくまでも別のことばである。優劣の問題は起こらない。――〈規準〉に依った判断に対し“正確”，そうでない判断に対し“不正確”といった物言いがしばしば現われたりするが。

2.4 “空間”の概念化による“同型”の数学的定式化

2.4.1 〈見え〉の同型

日常語の“同型”は，ある場合には，計量に関わる〈見え〉の同型である。そしてこの場合の〈見え〉は，平面への対象の射影である。したがって，“同型”は，基本的に，平面に埋め込まれている対象――２次元の対象――の間の同型である。

この意味の“同型”は，二つの対象を色々な角度から見較べる実践――両者が現わす様々な〈見え〉を比較しその結果を統合するという実践――によって，空間内対象の間の同型の概念へと拡張される。

2.4.2 空間の部分の同型

“同型”は，〈見え〉の同型として，差し当たって《平面 E の二つの部分(集合)――E の上の二つの絵――の間の同型》として定式化される。

さらに，計量に関わるこの同型の場合，二つの部分の同型が考えられている平面は，計量が定義されている平面である。

われわれは，“計量が定義されている平面”を(n 次元)ユークリッド空間――実数体 $\mathbb{R}$ 上のユークリッド計量線型空間を随伴するアフィン空間 $(E,\ D,\ \mathbb{R})$――として定式化するとしよう。

ユークリッド計量によって，D の元 x に対し“x の長さ” $|x|$ が定義される。また，E 上の距離関数 d が

$$d(X,\ Y)=|\overrightarrow{XY}|\quad (X,\ Y\in E)$$

で定義される。簡単のために，$|\overrightarrow{XY}|$ を $\overline{XY}$ と表わすことにする。

2.4.3 同型写像

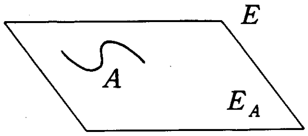
“空間 E の二つの部分の間の同型”の概念が考えられるとき，これを“空間 E の部分 A と空間 E' の部分 A' の間の同型”の概念に一般化することができる。

“合同”，“相似”の主題に対しわれわれが考える同型は，ユークッド計量構造の同型である。そしてユークリッド空間 E とこれの部分 A に対し，E の計量構造から A に導出される構造

が，A の構造としてここで考えるところのものである。

2.4.4 同型写像の，空間への拡張

ユークッド空間 E の部分 A に対し，A から生成される E の部分空間(註)を E_A で表わすことにしよう。



“合同”，“相似”の主題の場合，A の A' の上への同型写像 F については，これが E_A の $E'_{A'}$ の上へのアフィン写像 G に一意的に拡張されること，そして G は1対1であり，特に E_A と $E'_{A'}$ が同次元であることが，要件になる。そしてこのときの G は，空間 E_A の空間 $E'_{A'}$ の上への同型写像になる。(§3.2.2，4.3.2)

したがって，“合同”，“相似”の場合，“同型”は《空間の間の同型写像の制限》という形でつねに考えていくことができ，“同型”は専ら“ユークッド空間の同型”として主題化すればよいことになる。

(註) E の部分空間で A を含む最小のもの。

2.4.5 自己同型写像

空間 E の空間 E' の上への同型写像の特殊として，空間 E のそれ自身の上への同型写像——E の自己同型写像 (変換)——が主題化される。

計量構造に関する同型(“合同”，“相似”)の概念の場合，“同型”は，二つの空間の間の同型写像ではなく，専ら《ユークリッド計量を一つ固定した空間の自己同型写像》として，本質的な主題となる。何故なら，計量の値は空間の枠に依存するからである。

2.5 単体複体の絵の同型

2.5.1 単体複体の絵の同型

現行では，“同型”(“合同”と“相似”)は専ら“多角形の同型”——特に，“三角形の同型”——として主題化される。そして，“同型の条件”で単元がまとめられる。

しかし，“多角形”の概念は，ユークリッド空間論のものではない。それは，単位複体の幾何学に属する。“多角形の同型”とは，“多角形の絵 (ユークリッド空間の部分としての) の同型”である。そして，“多角形の絵の同型”の主題は，一般的には“単体複体の絵の同型”である。

2.5.2 単体複体の絵

単体複体の絵は，つぎの約束に従って，ユークリッド空間 E の中に描かれる：

1° 頂点 (0単体) は E の点で描く。

2° n 単体の ($n+1$個の) 頂点は，一般的な位置にある $n+1$個の点(註1)で描く。

3° n 単体Δの境界$\dot{\Delta}$がつぎの条件を満たす E の部分集合 S として描かれているとする：

S で生成される E の部分空間を E_S とするとき，S は E_S を有界と非有界の二つの連結な部分に分割する.

このときの有界な連結部分を I とするとき，Δを合併 $S \cup I$ で表現する。

4° 二つの単体Δ_1，Δ_2と，Δ_iの表現 $S_i (i=1, 2)$ に対し，

$S_i \cap S_2 \neq \phi \Longleftrightarrow \Delta_1$ とΔ_2 は面を共有する

かつこのとき，$S_1 \cap S_2$ はΔ_1 とΔ_2 が共有する面の表現と一致する。

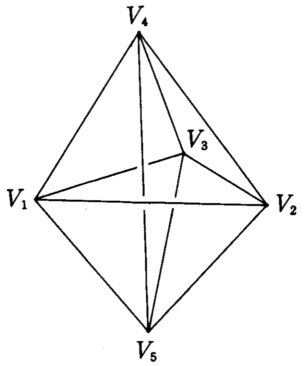
このとき，n 次元単体複体の絵を描くためには，キャンバスとして $2n+1$ 次元のユークッド空間を用意すれば十分である(註2)。

(註1) ユークリッド空間 E の点 X_1，……，X_{n+1} が一般的な位置にあるとは，これらによって生成される E の部分空間が n 次元であること。別の

言い方をすると，n 個のベクトル $\overrightarrow{X_1X_i}$ ($i=2$, ……, $n+1$) が線型独立であること。

（註２）　$2n+1$ は，《$2n+1$ でなければならない例がある》という意味での，必要最大数である。

例：3($=2\times1+1$) 次元ユークッド空間に



のように描かれた１次元単体複体は，２次元以下のユークッド空間には描けない。

3 合同――“合同”の数学的定式化

本章では，以下“空間”と言えばそれはユークリッド空間のことであるとする。

3.1 “合同”の規準

《“合同”に見えてしまう二つの図に対しては，(＊)つぎの条件を満たす１対１対応がとれる：

点 X_1，X_2 にそれぞれ点 X_1'，X_2' が対応するとき，

(#)　　$\overline{X_1X_2}=\overline{X_1'X_2'}$.

が成立していて，逆に（＊）が成立している二つの図は“合同”に見えてしまう》ということで，（＊）が“合同”の規準とされる。

(#) は，“距離の保存”と読む。“合同”は，《対応する距離 ($\overline{X_1X_2}$), ($\overline{X_1'X_2'}$) の関係》という形で規定される概念である。

3.2 “合同”の数学的定式化

3．2．1 等長写像

われわれははじめに，“空間 E の二つの部分の間の合同”の概念を，“空間 E の部分 A と空間 E' の部分 A' の間の合同”の概念に一般化しておく。

空間 E の部分 A と空間 E' の部分 A' が合同であるということを，A の A' の上への１対１写像 F でつぎの条件を満たすものが存在することとする：

（＊）X_1，$X_2 \in A$ に対し，

$$\overline{X_1X_2}=\overline{F(Y_1)F(Y_2)}.$$

このときの F を，A の A' の上への等長写像と呼ぶことにする。

条件(＊)は，つぎの条件と同値である[註1]：

(#) X_1，Y_2，Y_1，$Y_2 \in A$ に対し，

$$\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{Y_1Y_2}=\overrightarrow{F(X_1)F(X_2)}\cdot\overrightarrow{F(Y_1)F(Y_2)}.$$

等長写像の条件は，特につぎのことを含意している[註2]：

任意の X，Y，$Z \in A$ に対し，

$$\angle YXZ=\angle F(Y)F(X)F(Z).$$

等長写像 $F: A \longrightarrow A'$ の逆写像 $F^{-1}: A' \longrightarrow A$ は，等長写像である[註3]。

（註１）　各 $X \in A$ に対し，$F(X)$ を X' と表わすことにする。

（＊）$\Longrightarrow$(#)：先ず，P, Q, $R \in A$ に対し，$\overline{RP}^2=\overline{PR}^2=\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR}=(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})=\overline{PQ}^2+2\times\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}+\overline{QR}^2$。

よって，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}(\overline{RP}^2-\overline{PQ}^2-\overline{QR}^2)。$$

そこで，

$\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2}=\overrightarrow{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2}\cdot(\overrightarrow{Y_1X_1}+\overrightarrow{X_1X_2}+\overrightarrow{X_2Y_2})=\overrightarrow{Y_1X_1}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}+\overrightarrow{X_1X_2}^2+\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{X_2Y_2}=\frac{1}{2}(\overline{X_2Y_1}^2-\overline{Y_1X_1}^2-\overline{X_1X_2}^2)+\overline{X_1X_2}^2+\frac{1}{2}(\overline{Y_2X_1}^2-\overline{X_1X_2}^2-\overline{X_2Y_2}^2)=\frac{1}{2}(\overline{X_2Y_1}^2-\overline{Y_1X_1}^2+\overline{Y_2X_1}^2-\overline{X_2X_2}^2)$。

同様に，
$\overrightarrow{X_1'X_2'}\cdot\overrightarrow{Y_1'Y_2'}=\frac{1}{2}(\overline{X_2'Y_1'}^2-\overline{Y_1'X_1'}^2+\overline{Y_2'X_1'}^2-\overline{X_2'Y_2'}^2)$
であり，そして右辺は条件(＊)より
$=\frac{1}{2}(\overline{X_2Y_1}^2-\overline{Y_1X_1}^2+\overline{Y_2X_1}^2-\overline{X_2Y_2}^2)$
$=\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{Y_1Y_2}$。

(#)$\Longrightarrow$(＊)：$\overline{X_1'X_2'}^2=\overrightarrow{X_1'X_2'}\cdot\overrightarrow{X_1'X_2'}=\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{X_1X_2}=\overline{X_1X_2}^2$。

（註 2） $\cos(\angle XYZ)=(\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ})/(\overline{XY}\times\overline{XZ})=\overrightarrow{F(X)F(Y)}\cdot\overrightarrow{F(X)F(Z)}/(\overline{F(X)F(Y)}\times\overline{F(X)F(Z)})=\cos(\angle F(Y)F(X)F(Z))$。

（註 3） 実際，X_1'，X_2'，Y_1'，$Y_2'\in A'$に対し，
$\overrightarrow{X_1'X_2'}\cdot\overrightarrow{Y_1'Y_2'}$
$=\overrightarrow{F(F^{-1}(X_1'))F(F^{-1}(X_2'))}$
$\cdot\overrightarrow{F(F^{-1}(Y_1'))F(F^{-1}(Y_2'))}$
$=\overrightarrow{F^{-1}(X_1')F^{-1}(X_2')}\cdot\overrightarrow{F^{-1}(Y_1')F^{-1}(Y_2')}$　。

3.2.2 等長写像の，空間への拡張(註1)

空間Eの部分Aと空間E'の部分A'に対し，AのA'の上への等長写像Fは，E_Aの$E'_{A'}$の上へのアフィン写像Gに一意的に拡張される；Gは1対1であり，特にE_Aと$E'_{A'}$は同次元である。

実際，Gはつぎのように定義される(註2)：空間E_Aの枠$(O；U_1,\cdots\cdots,U_n)$をO，U_1，……，$U_n\in A$であるようにとるとき，E_Aの各点$X=O_+(\overrightarrow{OU_1}_\times\xi_1+\cdots\cdots+\overrightarrow{OU_n}_\times\xi_n)$に対し
$G(X)=F(O)_+(\overrightarrow{F(O)F(U_1)}_\times\xi_1$
$+\cdots\cdots+\overrightarrow{F(O)F(U_n)}_\times\xi_n)$.

さらにGは，空間E_Aの空間$E'_{A'}$の上への等長写像になっている(註3)。

したがって，空間の部分の間の合同は《空間の間の等長写像の制限》という形で，つねに考えていくことができる。

（註1） Cf. §2.4.4。
（註2） 各$X\in A$に対し，$F(X)$をX'と表わすことにする。

(1) 先ず，$(O'；U_1',\cdots\cdots,U_n')$が空間$\mathrm{E}'_{A'}$の枠になることを示す。

$x'=\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}_\times\xi_i=0$とするとき，$0=|x'|^2=\sum_i\sum_j\overrightarrow{O'U_i'}\cdot\overrightarrow{O'U_j'}\times\xi_i\times\xi_j=(\sum_i\sum_j\overrightarrow{OU_i}\cdot\overrightarrow{OU_j}\times\xi_i\times\xi_j)=(\sum_i\overrightarrow{OU_i}_\times\xi_i)\cdot(\sum_i\overrightarrow{OU_i}_\times\xi_i)=|\sum_i\overrightarrow{OU_i}_\times\xi_i|^2$。よって，$\sum_i\overrightarrow{OU_i}_\times\xi_i=0$。$\overrightarrow{OU_i}$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$は線型独立だから，$\xi_i=0$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$。よって，$\overrightarrow{O'U_i'}$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$は線型独立。特に，$E'_{A'}$の次元mは$\leqq n$。

合同の関係は対称であるから（実際，等長写像の逆写像な等長写像），$n\leqq m$。よって，$m=n$。したがって，$\overrightarrow{O'U_i'}$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$が線型独立になる$n+1$個の点の組$(O'；U_1',\cdots\cdots,U_n')$は空間$E'_{A'}$の枠になる。

(2) GがFの拡張になっていること：Aの点$X=O_+(\overrightarrow{OU_1}_\times\xi_i+\cdots\cdots+\overrightarrow{OU_n}_\times\xi_n)$に対し，各$k=1$，……，$n$について，$\overrightarrow{O'X'}\cdot\overrightarrow{O'U_k'}=\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OU_k}=(\sum_i\overrightarrow{\mathrm{OU}_i}\times\xi_i)\cdot\overrightarrow{OU_k}=\sum_i\overrightarrow{OU_i}\cdot\overrightarrow{OU_k}\times\xi_i=\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}\cdot\overrightarrow{O'U_k'}\times\xi_i=(\sum_i\overrightarrow{\mathrm{O'U}_i'}_\times\xi_i)\cdot\overrightarrow{O'U_k'}$。よって，$(\overrightarrow{O'X'}-\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}_\times\xi_i)\cdot\overrightarrow{O'U_k'}=0$。$(O；U_1,\cdots\cdots,U_n)$が$E'_{A'}$の枠であることから，$\overrightarrow{O'X'}-\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}_\times\xi_i\in E'_{A'}$がすべての$\overrightarrow{O'U_k'}$ $(k=1,\cdots\cdots,n)$に対して垂直であることはない。よって，$\overrightarrow{O'X'}=\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}_\times\xi_i$，即ち，$X'=O'_+\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}_\times\xi_i$。

(3) Gがアフィン写像であること：関数$f:\overrightarrow{OX}\longrightarrow\overrightarrow{G(O)G(X)}$が線型写像であることを示せばよい。

x，$y\in D$をそれぞれ$x=\overrightarrow{OX}=\sum_i\overrightarrow{OU_i}_\times\xi_i$，

$y=\overrightarrow{OY}=\sum_i \overrightarrow{OU_i}\times\eta_i$ とすると，$Z=O+\sum_i \overrightarrow{OU_i}\times(\xi_i+\eta_i)$ に対して $x+y=\overrightarrow{OZ}$。よって，$f(x+y)=f(\overrightarrow{OZ})=\overrightarrow{G(O)G(Z)}=\overrightarrow{F(O)G(Z)}=\sum_i \overrightarrow{F(O)F(U_i)}\times(\xi_i+\eta_i)=\sum_i \overrightarrow{F(O)F(U_i)}\times\xi_i+\overrightarrow{F(O)F(U_i)}\times\eta_i=f(\overrightarrow{OX})+f(\overrightarrow{OY})=f(x)+f(y)$。

また，実数λに対し，

$f(x\times\lambda)=\sum_i \overrightarrow{F(O)F(U_i)}\times(\xi_i\times\lambda)=(\sum_i \overrightarrow{F(O)F(U_i)}\times\xi_i)\times\lambda=f(x)\times\lambda$。

(4)　F の拡張になるアフィン写像が G に限ること：アフィン写像 $H: E_A \longrightarrow E'_{A'}$ が F の拡張であるとき，$X=O+(\overrightarrow{OU_1}\times\xi_1+\cdots\cdots+\overrightarrow{OU_n}\times\xi_n)$ に対し，$H(X)=H(O)+(\overrightarrow{H(O)H(U_1)}\times\xi_1+\cdots\cdots+\overrightarrow{H(O)H(U_n)}\times\xi_n)=O'+(\overrightarrow{O'U_1'}\times\xi_1+\cdots\cdots+\overrightarrow{O'U_n'}\times\xi_n)=G(X)$。

（註３）　X_1，X_2，Y_1，$Y_2\in A$ に対し $\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{Y_1Y_2}=\overrightarrow{F(X_1)F(X_2)}\cdot\overrightarrow{F(Y_1)F(Y_2)}$ であるとき，任意の X，$Y\in E_A$ に対して $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{G(X)G(Y)}$ となることを示す。

$X=\sum_i \overrightarrow{OU_i}\times\xi_i$，$Y=\sum_i \overrightarrow{OU_i}\times\eta_i$ とすると，$\overrightarrow{XY}=\sum_i \overrightarrow{OU_i}\times(\eta_i-\xi_i)$，$\overrightarrow{G(X)G(Y)}=\sum_i \overrightarrow{F(O)F(U_i)}\times(\eta_i-\xi_i)$ だから，$\overline{XY}^2=\sum_i\sum_j(\overrightarrow{OU_i}\cdot\overrightarrow{OU_j})\times(\eta_i-\xi_i)\times(\eta_j-\xi_j)=\sum_i\sum_j \overrightarrow{F(O)F(U_i)}\cdot\overrightarrow{F(O)F(U_j)}\times(\eta_i-\xi_i)\times(\eta_j-\xi_j)=\overline{G(X)G(Y)}^2$。

3.2.3 等長変換

空間 E の空間 E'の上への等長写像（§3.2.4）の特殊として，空間 E のそれ自身の上への等長写像が考えられる。これを，空間 E の等長変換と呼ぶことにする。

3.3　単体複体の絵の合同

3.3.1 単体複体の絵の合同

現行では，“合同”は専ら“多角形の合同”——特に，“三角形の合同”——として主題化される。しかし既に述べたように(§2.5.1)，このときの“多角形の合同”は，“多角形の絵（ユークリッド空間の部分としての）の合同”のことである。

3.3.2 “多角形の合同条件”

つぎのように述べられているものが“n 角形の合同条件”である：

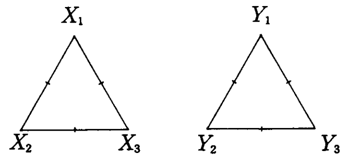
《$X_1\cdots\cdots X_n$を頂点とする n 角形$\mathscr{X}$と $Y_1\cdots\cdots Y_n$を頂点とする n 角形$\mathscr{Y}$は，つぎの条件を満たす $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の置換 f が存在するとき合同：

1)（X_i, X_j）が$\mathscr{X}$の一辺を形成していれば，（$Y_{f(i)}, Y_{f(j)}$）は$\mathscr{Y}$の一辺を形成していて，かつ
$$\overline{X_iX_j}=\overline{Y_{f(i)}Y_{f(j)}}.$$
2)（X_i, X_j, X_k）が$\mathscr{X}$の一つの角を形成していれば，（$Y_{f(i)}, Y_{f(j)}, Y_{f(k)}$）は$\mathscr{Y}$の一つの角を形成していて，かつ
$$\angle X_iX_jX_k=\angle Y_{f(i)}Y_{f(j)}Y_{f(k)}.$$

ここで，“(X_i, X_j)が$\mathscr{X}$の一辺を形成”とは，X_i, X_jが$\mathscr{X}$の一辺の両端点になっていること，また，“(X_i, X_j, X_k)が$\mathscr{X}$の一つの角を形成”とは，(X_i, X_j)，(X_j, X_k) がそれぞれ$\mathscr{X}$の一辺を形成していること。》(註)

この場合，“$X_1\cdots\cdots X_n$ を頂点とする n 角形”は，n 角形の絵で，頂点を点 $X_1\cdots\cdots X_n$に表現したものの謂いであることに，注意しておかねばならない。（距離と角の大きさは，ユークリッド空間の中で定義される！）

（註）　例えば，二つの合同な正三角形：



では，f として6通りのとり方がある。

4 相似——“相似”の数学的定式化

前章に引き続き本章でも，以下“空間”と言えばそれはユークリッド空間のことであるとする。

4.1 “相似”の規準

《“相似”に見えてしまう二つの図に対しては，

(＊) つぎの条件を満たす1対1対応がとれる：点 X_1, X_2, Y_1, Y_2 にそれぞれ点 X_1', X_2', Y_1', Y_2' が対応するとき，

(#) $\overline{X_1Y_1}\times\xi=\overline{X_2Y_2}$
$\Longrightarrow \overline{X_1'Y_1'}\times\xi=\overline{X_2'Y_2'}$.

が成立していて，逆に（＊）が成立している二つの図は“相似”に見えてしまう》ということで，（＊）が“相似”の規準とされる。

(#) は，“距離の比の保存”と読む。“相似”は，《対応する距離対 $(\overline{X_1Y_1}, \overline{X_2Y_2})$，$(\overline{X_1'Y_1'}, \overline{X_2'Y_2'})$ の関係》という形で規定される概念である。

4.2 “合同”への還元

“合同”と“相似”の記述では，

・“相似”から出発して，“合同”を“相似”の特殊として述べる

・“合同”から出発して，“相似”を“合同”の一般化かつ“合同”に還元されるものとして述べる

の二通りがあり得る。しかし本質的なのは，後者の方である。

実際，(平面)図の相似の判定法——図の平行関係を保って二つを前後に移動し，ぴったり重なって見えるかどうかを見る——では，“相似”は“合同”＝“ぴったり重なる”に還元されているわけである。

また，元来，“合同”は“相似”の直接の特殊ではない。既に述べたように，“合同”と“相似”はそれぞれ“距離の保存”，“距離の比の保存”として主題化されるものである。“相似”の特徴づけである《対応する距離の比が一定》(§4.3.1) は“合同”を直接の特殊とするが，この特徴づけは“相似”の本義の直接の表現ではない。

4.3 “相似”の数学的定式化

4.3.1 相似写像

“図の相似”は，“空間 E の二つの部分の間の相似”の概念に定式化される。

さらに，“空間 E の二つの部分の間の相似”の概念は，“空間 E の部分 A と空間 E' の部分 A' の間の相似”の概念に一般化できる。

空間 $E=(E, D)$ の部分 A と空間 E' の部分 A' が相似であるということを，A の A' の上への1対1写像 F でつぎの条件を満たすものが存在することとする：

(＊) $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in A$ に対し，
$\overline{X_1X_2}\times\xi=\overline{Y_1Y_2}$
$\Longrightarrow \overline{F(X_1)F(X_2)}\times\xi=\overline{F(Y_1)F(Y_2)}$.

このときの F を，A の A' の上への相似写像と呼ぶことにする。

条件(＊)は，つぎの条件と同値である[註1]：

(#) 正数 α が存在して，$X, Y\in A$ に対し，
$\overline{XY}\times\alpha=\overline{F(X)F(Y)}$.

ところで，D のユークリッド計量 Q と正数 $\alpha>0$ に対し

$$Q_1(x)=Q(x)\times\alpha^2$$

で定義される写像 $Q_1: D\longrightarrow\mathbb{R}$ は，再び D のユークリッド計量になる。——実際，Q をユークリッド計量と定める正規直交基底 $\{u_1, \cdots\cdots, u_n\}$ に対し，$\{u_{1\times}\alpha^{-1}, \cdots\cdots, u_{n\times}\alpha^{-1}\}$ は Q_1 をユークリッド計量と定める正規直交基底になる

[註2]。――そして(#)を計量 Q に関するものであるとするとき，Q を Q_1 に取り替えることで，(#)は F を等長写像と定める条件になる。

そこで特に(§3. 2. 1., (＊)$\Longleftrightarrow$(#)), 条件(#)は条件：

(#)′ 正数 α が存在して，$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in A$ に対し，

$$(\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{Y_1Y_2})\times\alpha = \overrightarrow{F(X_1)F(X_2)}\cdot\overrightarrow{F(Y_1)F(Y_2)}.$$

と同値になる[註3]。

また，等長写像の合意として(§3. 2. 1)，

任意の X，Y，$Z\in A$ に対し，

$$\angle YXZ = \angle F(Y)F(X)F(Z).$$

さらに，相似写像 $F: A \longrightarrow A'$ の逆写像 $F^{-1}: A' \longrightarrow A$ は，相似写像である[註4]。

（註１） 各 $X\in A$ に対し，$F(X)$ を X' と表わすことにする。

(＊)$\Longrightarrow$(#)：異なる二点 P，$Q\in A$ に対し，$\overline{PQ}\times\alpha=\overline{P'Q'}$ とする。任意の X，$Y\in A$ に対し，$\overline{XY}=\overline{PQ}\times\xi$ のとき，条件(＊)から $\overline{X'Y'}=\overline{P'Q'}\times\xi$。さらに，$\overline{XY}\times\alpha=(\overline{PQ}\times\xi)\times\alpha=(\overline{PQ}\times\alpha)\times\xi=\overline{P'Q'}\times\xi=\overline{X'Y'}$.

(#)$\Longrightarrow$(＊)：$\overline{X_1X_2}\times\xi=\overline{Y_1Y_2}$ のとき，$\overline{X_1'X_2'}\times\xi=\overline{X_1X_2}\times\alpha\times\xi=\overline{Y_1Y_2}\times\alpha=\overline{Y_1'Y_2'}$。

（註２） ベクトル x の長さとベクトル x，y の内積を，計量 Q に関するとき $|x|$，$x\cdot y$ と書き，Q_1 に関するとき $\|x\|$，$x\circ y$ と書くことにする。

一般に，$Q_1(x_\times\alpha^{-1})=Q(x_\times\alpha^{-1})\times\alpha^2=Q(x)\times(\alpha^{-1})^2\times\alpha^2=Q(x)$。よって，$\|x_\times\alpha^{-1}\|=|x|$，$(x_\times\alpha^{-1})\circ(y_\times\alpha^{-1})=(Q_1(x_\times\alpha^{-1}+y_\times\alpha^{-1})-Q_1(x_\times\alpha^{-1})-Q_1(y_\times\alpha^{-1}))/2=(Q(x+y)-Q(x)-Q(y))/2=x\cdot y$。特に，$\|u_{i\times}\alpha^{-1}\|=|u_i|=1$，$(u_{i\times}\alpha^{-1})\circ(u_{j\times}\alpha^{-1})=u_i\cdot u_j=\delta_{ij}$。

（註３） （註２）と同じ記号を用いるとき，$(\overrightarrow{X_1X_2}\cdot\overrightarrow{Y_1Y_2})\times\alpha^2=((\overrightarrow{X_1X_2}{}_\times\alpha^{-1})\circ(\overrightarrow{Y_1Y_2}{}_\times\alpha^{-1}))\times\alpha^2=\overrightarrow{X_1X_2}\circ\overrightarrow{Y_1Y_2}$。

（註４） F が D の計量 Q に関して条件(#)を満たしているとき，F そして F^{-1} が Q_1 に関して等長写像。そして Q_1 に関して等長写像の F^{-1} は Q に関して相似写像。

4.3.2 相似写像の，空間への拡張

相似写像は，ユークリッド計量の適当な取り替えによっていつでも等長写像になる（前節）。そこで特に(§3. 2. 2)，以下のことが結論される。

A の A' の上への相似写像 F は，E_A の $E'_{A'}$ の上へのアフィン写像 G に一意的に拡張される；G は１対１であり，特に E_A と $E'_{A'}$ は同次元である。さらに G は，空間 E_A の空間 $E'_{A'}$ の上への相似写像になっている。

したがって，空間の部分の間の相似は，《空間の間の相似写像の制限》という形で，つねに考えていくことができる。

4.3.3 相似変換

空間 E の空間 E' の上への相似写像(§4. 4)の特殊として，空間 E のそれ自身の上への相似写像が考えられる。これを，空間 E の相似変換と呼ぶことにする。

E の相似変換 F に対し，条件：

任意の点 X，$Y\in E$ に対し

$$\overline{XY}\times\alpha=\overline{F(X)F(Y)}$$

を満たす正数 α が存在するが，これを F における相似比と呼ぶ。また，E の部分 A とこれに相似な $A'=F(A)$ に対し，"A に対する A' の相似比は α" という言い方をする。

4.3.4 相似拡大，"相似の位置関係"

一点 $P\in E$ と正数 α に対し

$$\overrightarrow{PF(X)}=\overrightarrow{PX}{}_\times\alpha \quad (X\in E)$$

で定義される写像 $F: E\longrightarrow E$ は，相似比 α の相似変換である[註1]。これを，P に関する相似比 α の相似拡大と言う。

任意の相似変換は，相似拡大と等長変換の合成の形に書ける[註2]。

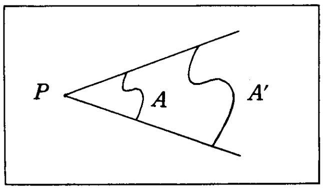
点 P に関する E の相似拡大 F と，E の部分 A，$A'=F(A)$ に対し，以下のことが成り立つ[註3]：

(1)　　$E_A // E_{A'}$

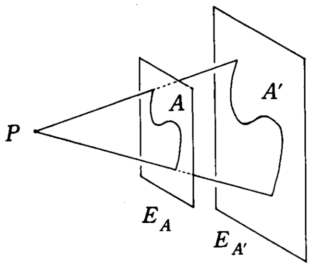
(2) $E_A=E_{A'} \Longleftrightarrow E_A \cap E_{A'} \neq \phi$

(3) F が恒等写像でないとき，

$$P\in E_A \Longleftrightarrow E_A=E_{A'}$$



$E_A=E_{A'}$



$E_A\neq E_{A'}(E_A//E_{A'})$

算数において“相似の中心”，“相似の位置関係”の言い回しの現われることがあるが，これらはつぎのように定式化される。即ち，点 P に関する E の相似拡大 F に対し $F(A)=A'$ の関係にある E の部分 A, A'は，P を相似の中心とする相似の位置関係にあると言う。

（註 1） 二点 X，Y に対し，$\overrightarrow{XY}\times\alpha=\overrightarrow{PX}\times\alpha-\overrightarrow{PY}\times\alpha=\overrightarrow{PF(X)}-\overrightarrow{PF(Y)}=\overrightarrow{F(X)F(Y)}$。特に，$\overline{XY}\times\alpha=\overline{F(X)F(Y)}$。

（註 2） 相似比αの相似変換 F に対し，一点 P を任意に固定し，G を P に関する相似比α^{-1}の相似拡大とするとき，F と G の合成 H は E の等長変換で，$F=G^{-1}\circ H$。

（註 3） F の相似比をαとする。

(1) （註 1）で示したように $\overrightarrow{XY}\times\alpha=\overrightarrow{F(X)F(Y)}$ であるから，特に，$E_A//E_{A'}$。

(2) $Q\in E_A\cap E_{A'}$とする。E_Aの枠$(O;U_1,\cdots\cdots,U_n)$を A の中からとるとき，$O'=F(O)$, $U_i'=F(U_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ は $E_{A'}$ の枠をつくる。$Q=O+\sum_i\overrightarrow{OU_i}\times\xi_i=O'+\sum_i\overrightarrow{O'U_i'}\times\xi_i'$とするとき，$\overrightarrow{O'U_i'}=\overrightarrow{OU_i}\times\alpha$であるから，$O'=O+\sum_i\overrightarrow{OU_i}\times(\xi_i-\alpha\times\xi_i')\in E_A$。特に，$O'\in E_A$。さらに，$U_i'=O'+\overrightarrow{OU_i}\times\alpha\in E_A$。よって，$E_A=E_{A'}$。

(3) $P\in E_A$ のとき $A'=F(A)\subset E_A$。よって $E_{A'}\subset E_A$。(2)より，$E_A=E_{A'}$。

逆に，$E_A=E_{A'}$ とする。$Q\in A$, $Q'=F(Q)$ に対し $\overrightarrow{PQ}\times\alpha=\overrightarrow{PQ'}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QQ'}$。仮定 $\alpha\neq 1$ より，$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QQ'}\times(1-\alpha)$，即ち $P=Q+\overrightarrow{QQ'}\times(1-\alpha)$。仮定から $Q'\in E_A$。よって，$P\in E_A$。

4.4 単体複体の絵の相似

4.4.1 単体複体の絵の相似

現行では，“相似”は専ら“多角形の相似”——特に，“三角形の相似”——として主題化される。しかし既に述べたように(§2.5.1)，このときの“多角形の相似”は，“多角形の絵（ユークリッド空間の部分としての）の相似”のことである。

4.4.2 “多角形の相似条件”

つぎのように述べられているものが“n 角形の相似条件”である：

《$X_1\cdots\cdots X_n$を頂点とする n 角形$\mathscr{X}$と $Y_1\cdots\cdots Y_n$を頂点とする n 角形$\mathscr{Y}$は，つぎの条件を満たす $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の置換f と正数$\alpha>0$が存在するとき相似：

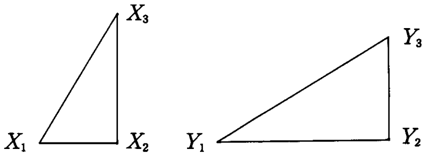
1) (X_i, X_j) が$\mathscr{X}$の一辺を形成していれば，$(Y_{f(i)}, Y_{f(j)})$は$\mathscr{Y}$の一辺を形成していて，かつ $\overline{X_iX_j}\times\alpha=\overline{Y_{f(i)}Y_{f(j)}}$.

2) (X_i, X_j, X_k) が$\mathscr{X}$の一つの角を形成していれば，$(Y_{f(i)}, Y_{f(j)}, Y_{f(k)})$ は$\mathscr{Y}$の一つの角を形成していて，かつ

$$\angle X_iX_jX_k=\angle Y_{f(i)}Y_{f(j)}Y_{f(k)}.$$》(註)

この場合，“$X_1\cdots\cdots X_n$を頂点とする n 角形”が，実際には n 角形の絵で，頂点を点 $X_1\cdots\cdots X_n$ に表現したものの謂いであることに，再び(*Ch.* §3.3.2)注意しておく。

（註）例えば，



の場合，

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

5 対　　称

5.1 “対称”の概念

“対称”の教材化は，“図形”領域に限られるのではない。“対称”の概念は，“数と計算”，“量と測定”，“数量関係”，“図形”のすべての領域に潜在している。

これらすべての領域に潜在し得る“対称”に対して，われわれは“対称一般”とか“対称の本質”といった言い回しを使いたくなる。そしてそれは，形式としての“対称”である。単に形式であることによって，それは異なる意味領域に潜在できている。

“対称な関係”としての“対称”の意味は，“互いに他の逆”である。（“点対称”，“線対称”は，“互いに他の逆”の一形態である[註]。）そしてこの意味の形式化は，ユークリッド空間の点および部分に関する対称の概念である。

数，量，図といった異なる意味対象にひとしく“対称”が考えられるのは，これらに対してユークリッド空間の解釈が立つからであり，かつこの限りにおいてである。――したがって，“対称”一般（“対称”の本質）の教材化は，ユークリッド空間の教材化の一環として位置付けられる。

（註）　例えば“点 O に関する点対称”の場合，点 X，Y についての“互いに他の逆”は，“X と Y は O から互いに逆方向で同じ距離のところに在る”。

5.2 “対称”の認識

“対称”の認識は，自己対称な絵に対する“対称”の認識から出発する。ひとはこのとき，端的に“対称”を感じる。われわれはつぎのように言いたくなる：カラダは“対称”を特別に受け入れるようなものになっている，と。

“対称形”は，結果論である。そして，“対称形”が結果論になるような形に対し“整っている”，“規則性がある”という〈感じ〉を持つのは身体性である。

ひとはつぎに，“対称”の理屈を考え出す。そして，“対称の中心”，“対称軸”を枠として構図を描き始める。

“対称の中心”，“対称軸”は，現前の絵に対するわれわれの投企である。そしてそれは，結果論として，潜在していたことになる。そしてわれわれの投企は，潜在しているものを顕在化したというように解釈される。

“対称”の認識という実践は，《見ている形に対し，いままではこの中に見ていなかったところの要素（この意味で，“潜在の要素”）を新たに付け加え，この要素に関して形を構成し直す》という形態の実践のうちの一つである。実際，“対称の中心”，“対称軸（画）”が“非在の要素”として投企され，これまでの形が“対称形”として新たに現われてくるわけである。

投企は，実践である。それは，“なるかならぬか”の〈賭け〉である。

“対称”の認識は，この“非在の要素”の投企というところに著しい飛躍があり，〈賭け〉がある。

“非在の要素”の投企の契機は，形に対し“整っている”，“規則性がある”という〈感じ〉を持つことである。この〈感じ〉を持つことなく“非在の要素”の投企という〈賭け〉に及ぶことはあり得ない。

5.3 “対称”の数学的定式化

5.3.1 空間の二点に関する対称

日常語の“対称”の数学的定式化は，先ず，空間の二点に関する対称である。

またこのとき，日常語レベルでの“点対称”と“線／面対称”の区別に応じて，“空間の二点に関する点対称”と“空間の二点に関する線／面対称の二つの概念が立つ。

このとき導入する空間は，点対称，線／面対称が定義できる空間であるが，“点対称が定義できる最も一般的な空間”と“線／面対称が定義できる最も一般的な空間”は異なる。実際，後者の方が前者よりも条件がきつくなる。

5.3.2 “二点の中点”の意義

何故，“対称”では“二点の中点”がキー概念になるのか。

二点に対してその中点を対象化する意義は，二点を互いに他に対して逆の存在として身分づけるということにある。“互いに異なる存在”としての二点は，中点の導入によって“互いに他の逆である存在”へと変わる。

例えば，併走する時速100kmの電車 A と時速80kmの電車 B の間に時速90kmの電車 C を併走させるとき，C の車中の人にとって A と B は“互いに他の逆の存在”の意味をもつものになる，というように。

5.3.3 点対称

5.3.3.1 点対称の概念を導入できる空間

二点に関する点対称の概念は，つぎのような空間——システムとしての空間——(E, D, K) において導入可能である。

E は集合。D には(内)算法＋が定義されていて，この算法に関して D は可換群——零元を 0 と書く。K には二つの(内)算法＋, ×が定義されていて，これらに関して K は体——単位元を 1 と書く。

E の要素(“点”)に対する D の要素(“ベクトル”)の(右)作用$_+$が定義されている。$_+$はつねに定義されているとは限らない。但し，$X \in E$, x, $y \in D$ に対し，$(X_+x)_+y$ が定義されるときには $X_+(x+y)$ も定義されて，かつ

$$(X_+x)_+y = X_+(x+y).$$

また，任意の X, $Y \in E$ に対し，$X_+x = Y$ となる $x \in D$ が一意的に存在する。この x を $\overrightarrow{XY}$ で表わす。

D の要素(“ベクトル”)に対する K の要素(“スカラー”)の(右)作用$_\times$が定義されている。$_\times$はつねに定義されるとは限らない。但し，x, $y \in D$, ξ, $\eta \in K$ に対し，$x_\times\xi$, $x_\times\eta$が定義されるときには $x_\times(\xi+\eta)$ も定着されて，かつ

$$x_\times\xi + x_\times\eta = x_\times(\xi+\eta)\,;$$

$(x_\times\xi)_\times\eta$が定義されるときには $x_\times(\xi\times\eta)$ も定義され，かつ

$$(x_\times\xi)_\times\eta = x_\times(\xi\times\eta)\,;$$

$x_\times\xi$, $y_\times\xi$が定義されるときには $(x+y)_\times\xi$も定義されて，かつ

$$x_\times\xi + y_\times\xi = (x+y)_\times\xi\,;$$

そして最後に，任意の $x \in D$ に対し，

$$x_\times 1 = x.$$

作用$_+$，$_\times$がつねに定義されるとするとき，空間 (E, D, K) の概念はアフィン空間の概念——“体 K 上の線型空間 D を随伴するアフィン空間 E”——と一致する。なお，表現(E, D, K) に対しさらに算法を明示する表現として

$$(E,((D,+),(K,+,\times),_\times),_+)$$

を導入しておく。

さて，以上のように定義した空間(E, D, K)において，E の二点 X, Y に関する点対称がつぎのように定義される。

O, X, $Y \in E$ に対し，$\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{OY}$ であるとき，言い換えると

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = 0$$

であるとき，X と Y は O に関して(点)対称であると言う。

5.3.3.2 例

(1)　算数科の“量と測定”領域に登場する量はすべて1次元ユークリッド空間$(E, D, \mathbb{R})$[注1]として解釈できる。したがって，これらの量については，対称を論ずることが出来る。

例えば，点としての長さ $X=7\text{cm}$，$Y=3\text{cm}$ は，点としての長さ $O=5\text{cm}$ に対して対称である。実際この場合，$\overrightarrow{OX}=+2\text{cm}$, $\overrightarrow{OY}=-2\text{cm}$ で，$\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=0$.

(2)　(E, D, K) をつぎのように定義する。

$E=\{P, Q, R, S, T\}$，$(D, +)=(\mathbb{Z}, +)$，

$(K, +, \times)=(\mathbb{Q}, +, \times)$[注2]。

E の要素 X に対する D の要素 x の作用$_+$：

	+	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
X	P	定義					P	Q	R	S	T	
X	Q	しない				P	Q	R	S	T		
X	R				P	Q	R	S	T			
X	S			P	Q	R	S	T			定義	
X	T		P	Q	R	S	T				しない	

D の要素 x に対する K の要素ξの作用$_\times$：

有理数の乗法×に関して

$$x_\times \xi=\begin{cases} x\times\xi & (x\times\xi：\text{整数}) \\ \text{定義しない} & (x\times\xi：\text{整数でない}) \end{cases}$$

即ち，D の要素である整数 n は，列

$$P\quad Q\quad R\quad S\quad T$$

の上での移動：

“右に n”　　$(n>0)$

“左に n”　　$(n<0)$

“そのまま”　　$(n=0)$

であり，K の要素である有理数は，(移動としての)整数に対する倍である。そしてこの意味で，$_+$および$_\times$はつねには定義されない——作用$_\times$の場合では，例えば $6_\times\frac{2}{3}$ は定義され（実際，$=4$），$5_\times\frac{2}{3}$ は定義されない。

さてこのように定義した (E, D, K) において，例えば，$\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RT}=(-2)+2=0$ であるから P と T は R に関して(点)対称；また $\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QS}=(-1)+2\neq 0$ であるから P と S は Q に関して(点)対称ではない。

(3)　いま，左から読んでも右から読んでも同じでかつ真ん中の文字が有る文字列

“しんぶんし”

に対して“対称”の解釈をしてみよう。先ず，この文字列に対し文字の〈位置〉の列を見る：

“しんぶんし”

↓↓↓↓↓

$PQRST$

この列の構造——順序構造——は，(2)で定義した空間 (E, D, K) の代数的構造で表現される。R は，“どの位置 X についても，位置 R に関して X と対称な位置 Y が存在する”という意味で“真ん中の位置”である。そして“真ん中の位置に関して対称な二つの位置には同じ文字がある”が，文字列“しんぶんし”に対する“対称”の解釈になる。

（註1）　$\mathbb{R}$は実数体。

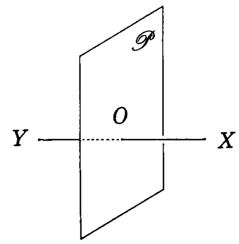
（註2）　$\mathbb{Z}$は整数全体の集合，$\mathbb{Q}$は有理数全体の集合。

5.3.4 ユークリッド空間における対称

5.3.4.1 部分空間に関する対称

二点に関する“点/線/面対称”の概念は，(計量が定義されているアフィン空間としての)ユークリッド空間において，部分空間に関する対称として，一般的に導入可能である。

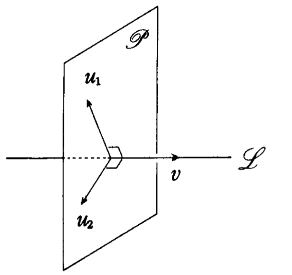
$\mathscr{P}$を E の m 次元部分空間とする。X と Y を通る直線が$\mathscr{P}$と直交[註]し，かつ交点 O に関して $\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=0$ であるとき，X と Y は$\mathscr{P}$に関して対称であると言う。



$(m=2)$

m が 0, 1, 2 の場合が，それぞれ“点対称”，“線対称”，“面対称”である。

(註)　直線$\mathscr{L}$の方向ベクトル v が$\mathscr{P}$に随伴する線型空間 D_P の任意のベクトル x に対して $v \perp x$ であるとき(このためには，D_P の或る基底$\{u_1, \cdots\cdots, u_m\}$に対して $v \perp u_i\ (i=1, \cdots\cdots, m)$ であれば十分)，$\mathscr{L}$は$\mathscr{P}$と直交すると言う。



$(m=2)$

5.3.4.2 超平面対称

n 次元ユークリッド空間における“$(n-1)$次元部分空間に対する対称”には，特に，“超平面[(註)]対称”のことばが与えられる。

(註)　アフィン空間 E が n 次元であるとき，それの $n-1$ 次元部分空間を E の超平面と呼ぶ。日常語レベルでの“空間の中の平面”，“平面の中の直線”，“直線上の点”は，それぞれ“空間”，“平面”，“直線”の超平面である。

5.3.4.3 2次元ユークリッド空間における“線対称”

日常語レベルの“平面の上の線対称”については，“線対称”と“面対称”の両方の解釈が可能である。

実際，2次元ユークリッド空間の直線[(註)]は，この空間の超平面である。

(註)　アフィン空間の1次元部分空間を，直線と呼ぶ。

5.3.5 座標による対称の表現

対称の関係を，n 次元ユークリッド空間 $(E, D, \mathbb{R})$ において座標で表現するとしよう。

二点 X，Y が m 次元部分空間$\mathscr{P}$に関して対称であることは，$\mathscr{P}$の任意の枠$(O\,;\,u_1, \cdots, u_m)$に対して $u_{m+1}, \cdots\cdots, u_n \in D$ を

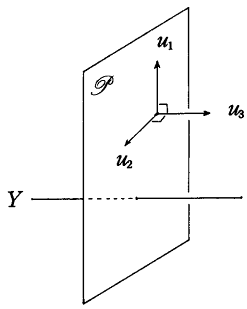
$u_i \perp u_j \quad (i=1, \cdots\ m\,;\, j=m+1, \cdots, n)$

$(O\,;\,u_1, \cdots\cdots, u_n)$ は E の枠

であるようにとったときの X と Y の座標 $(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n)$，$(\eta_1, \cdots\cdots, \eta_n)$ に関する条件：

$$\xi_i = \begin{cases} \eta_i & (i=1, \cdots\cdots, m) \\ -\eta_i & (i=m+1, \cdots\cdots, n) \end{cases}$$

で表現される。



$(n=3,\ m=2)$

5.3.6 対称変換

空間 E の部分空間$\mathscr{P}$に対して定義される E のそれ自身の上への1対1写像

$S_P : X \longrightarrow$ ($\mathscr{P}$に関して X と対象な点)

を，$\mathscr{P}$に関する E の対称変換と呼ぶことにす

る。

5.3.7 空間の部分に関する“対称”の概念

5.3.7.1 対称な二つの部分

$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$を空間 E の二つの部分とする。部分空間$\mathscr{P}$に関する E の対称変換で$\mathscr{X}$が$\mathscr{Y}$の上に写るとき，$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$は$\mathscr{P}$に関して対称であると言う。

5.3.7.2 自己対称

空間 E の部分$\mathscr{X}$は，部分空間$\mathscr{P}$に関して自分自身に対称であるとき，$\mathscr{P}$に関して自己対称であると言う。

$\mathscr{P}$に関して互いに対称な二つの部分$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$に対し，$\mathscr{X}\cup\mathscr{Y}$は$\mathscr{P}$に関して自己対称である。

5.4 等長変換としての対称変換

対称変換は等長変換（合同変換）である(註1)。特に(註2)，互いに対称な二つの部分$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$は合同。

（註１） 部分空間$\mathscr{P}$に関して点 X と X'が対称で，Y と Y'が対称のとき，線分 XX'，YY'と$\mathscr{P}$との交点をそれぞれ O，O'とすれば，$|\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OX'}+\overrightarrow{X'Y'}+\overrightarrow{Y'O'}+\overrightarrow{O'Y}| = |\overrightarrow{X'Y'}|$。

（註２） 等長変換 F に対し，任意の部分$\mathscr{X}$は $F(\mathscr{X})$ と合同。

5.5 “基本図形”における“対称”

5.5.1 “基本図形”の対称の特徴づけ

“基本図形”においては，対称は特有な形で特徴づけられる。それは，辺の長さ，内角の大きさ，半径の長さ，等のことばによる特徴づけである。

5.5.2 多角形の対称軸

多角形の対称軸は，頂点を通るか辺の二等分点を通るかである。――頂点 P を通るとき，それは P の頂角の二等分線になる；辺 W を通るとき，それは W の垂直二等分線になる。

そこで，対称軸について考えられるケースはつぎの三つである：

(a)　頂点と頂点を通る場合；

(b)　頂点と辺の二等分点を通る場合；

(c)　辺の二等分点と辺の二等分点を通る場合.

線対称 n 角形が(a)あるいは(c)の場合，n は偶数でなければならない――特に，$n\geqq 4$ である。逆に，偶数 $n\geqq 4$ に対し，線対称 n 角形が(a)と(c)の二通りで存在する。

(b)の場合には，n は奇数でなければならない。また逆に，奇数 $n\geqq 3$ に対し，線対称 n 角形は場合(b)のものとしてつねに存在する。

さらに，(a)，(b)，(c)の各場合について，多角形の等しい長さの辺はそれぞれ少なくとも $\frac{n}{2}$，$\frac{n-1}{2}$，$\frac{n-2}{2}$ 組存在し，等しい大きさの頂角はそれぞれ少なくとも $\frac{n-2}{2}$，$\frac{n-1}{2}$，$\frac{n}{2}$ 組存在する。また(c)の場合には，平行な二辺が少なくとも一組存在することになる。

5.5.3 線対称三角形，線対称四角形

線対称三角形は，“二等辺”で特徴づけられる。それは“二等辺三角形”のことになる。但し本質を言い当てていることばは，“二等辺三角形”ではなく，あくまでも“線対称三角形”の方である。“二等辺”は線対称であることの含意（結果）に過ぎない。しかし現実は，“二等辺三多形”のことばによって二等辺三角形の本質――線対称――が却って隠蔽されるという結果になっている。

線対称四角形は，前節で述べた(a)の場合が“凧形”で，(c)の場合が“等脚台形”である。そして実際，“凧形”と“等脚台形”は，線対称四角形として，並行して指導されるのがスジである。――したがって特に，“等脚台形”の指導は“台形”の指導に含まれる類のものではない。

5.5.4 底辺指定の多角形の“線対称”

多角形について,“底辺が指定されている多角形”の概念を導入しよう。

底辺指定のある多角形に対しては，底辺の垂直二等分線が対称軸になることとして，これの“線対称”を定義する。

このように定義した“線対称”は，われわれの生活の中では，対称軸のとり方に条件をつけない“線対称”と等しい重みで現われる。即ち，ケース・バイ・ケースで二つの“線対称”の一方が選ばれる。例えば，家の形について“対称”が問題になるとき，その“対称”は，地平から真っ直ぐに立てられる対称軸に関する線対称として了解されるのであり，その他ではない。

5.5.5 底辺指定の三角形，四角形における線対称

三角形では，“底辺”の指定が“頂点”，“斜辺”のそれぞれの指定と同時の契機のものになる。そこで底辺指定の有る三角形の“線対称”は，つぎのそれぞれによって特徴づけられる：

1° 頂角の二等分線が対称軸になる；

2° 一方の斜辺が他方の斜辺の鏡像になるような対称軸がとれる.

底辺指定の有る四角形の場合には，線対称四角形は“等脚台形”である。