

図解

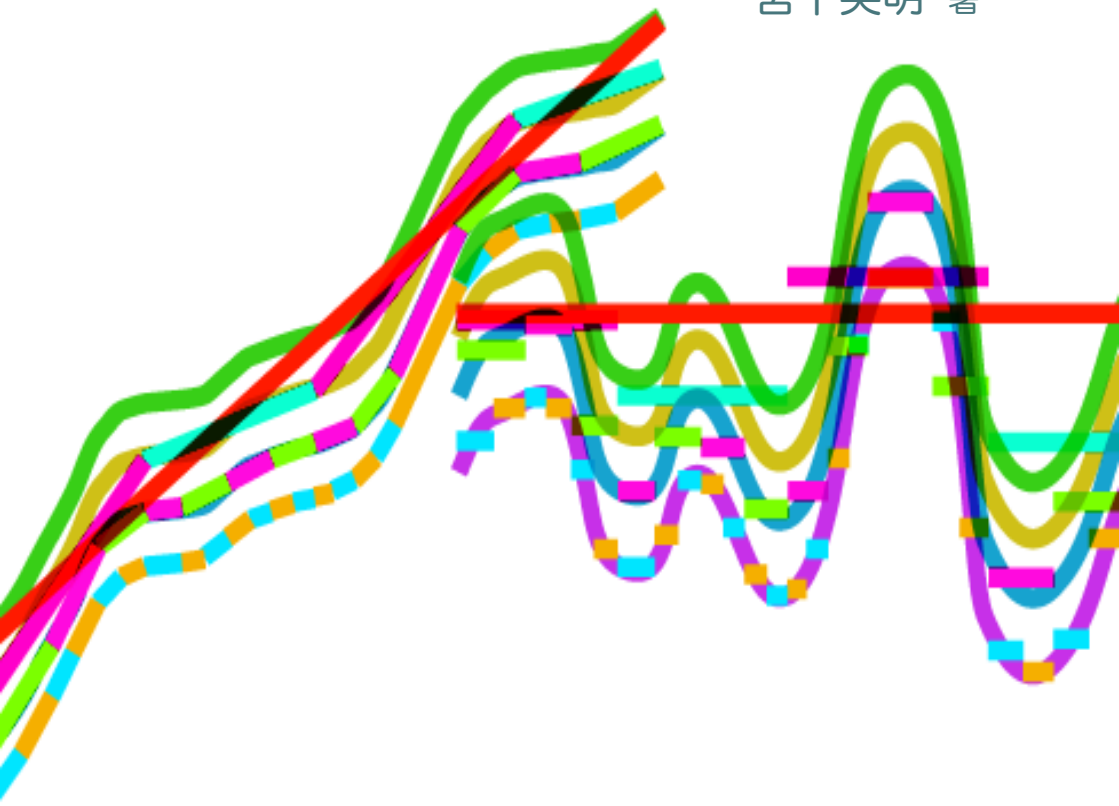
暗記と計算が数学になっている人
のための「意味を知る」シリーズ(1)

「微積分」入門

「微分積分」の意味

北海道教育大学教授

宮下英明 著



「微積分」入門

——「微分積分」の意味

本書について

本書は、

<http://m-ac.jp/>

のサイトで書き下ろしている

「微積分」入門——第1部：「微分積分」の意味

を PDF 文書の形に改めたものです。

文中の青色文字列は、ウェブページへのリンクであることを示しています。

序

「微積分」の学習のゴールは、「微積分」の意味を知り、微積分を使えるようになることである。

ところで、「微積分」の学習の問題は、学習者が「微積分」の意味を知らないままにいるということである。

「微積分」の意味を知らないままにいる学習者は、ではいったい何を「学習」としてやっているのか？

与えられた計算問題の計算をやっているのである。

意味を知らない一方で計算はできるということは、可能なのか？

可能なのである。

実際、小学算数に出てくる分数の割り算は、この調子で過ごしてきたはずである。

しかし、意味を知らないままやっていくことには、限界がある。

意味を知らないままの「微積分」の学習は、早晚行き詰まる。

学習者が「微積分」の意味を知らないままにいるとは、意味をきちんと教えられたことがないということである。

授業者が「微積分」の意味をきちんと教えないのは、

「微積分」の意味の指導というものがあつたことを、知らない

この指導のあることに、気づいていない

ということである。

授業者は、どうしてこんなふうなのか？

つぎの二つの場合がある：

A. 自分自身、「微積分」の意味を改めて考えたことがない

B. 自分は「微積分」の意味を指導していると思っている

Aのケースはあり得ないようだが、こんなふうで高校数学の教員免許がとれてしまうという現状である。よって、「高校の数学教員ではこれがむしろ大勢」というふうに思っていた方がよい。

Bは、数学は知っているが教育は知らないという場合である。

教える相手を自分のコピーと定めてしまうので、〈話した〉を〈相手に伝わった〉とイコールにしてしまうのである。一を話したに過ぎないのに、十を教えたと思ってしまう。

実際、これは大学の専門数学の教員にありがちのこととなる。

そこで、「微積分」の意味の学習テキストを作成することにした。

そのテキストがこれである。

目次

0. 導入	3
0.1 「微積分の意味を知る」ということ	4
0.2 「微積分」の意味の概要	6
0.3 テクストの構成	8
1. 「微積分」の学習の要点	13
1.1 「微分と積分は逆の関係にある」がわかる	14
2. 運動解析——経過時間・移動距離・速さ	19
2.0 準備：「移動」の運動の記述	20
2.1 <時間—距離>と<時間—速さ>	26
2.1.1 <時間—距離><時間—速さ>の相互導出を問題化	27
2.1.2 ヒント：等速運動の場合	31
2.1.3 <時間—距離>から<時間—速さ>を導く	34
2.1.4 <時間—速さ>から<時間—距離>を導く	36
2.1.5 <時間—距離>と<時間—速さ>の対応の多対1関係	38
2.2 特定時間における速さと距離	42
2.2.1 <時間—距離>から特定時間における速さを導く	43
2.2.2 <時間—速さ>から特定時間における距離を導く	44
2.3 「速さ」とは？	47
2.3.1 「速さ」はどう定義されるもの？	48
2.3.2 速さの「ある・なし」	50
2.3.3 「速さがある」：運動がなめらか（局所的に線形）	52
3. 運動解析から関数解析へ——微積分	55
3.1 運動解析の方法を数学に	56
3.1.1 運動を関数に	57
3.1.2 「<時間—距離>→<時間—速さ>」が微分に	59
3.1.3 「<時間—速さ>→<時間—距離>」が積分に	60
3.2 微分	61

3.2.1 局所的に線形，なめらか，接線，変化率	62
3.2.2 導関数	63
3.2.3 「微分する」「微分可能」	64
3.3 積分	65
3.3.1 区分求積	66
3.3.2 原始関数	68
3.3.3 定積分	70
3.3.4 不定積分	72
3.3.5 「積分する」	75
4. 微積分の応用性	77
4.1 「微積分の応用性」の構造	78
5. 学校数学の「微積分」	81
5.1 高校数学の「微積分」	82
5.1.1 微分：「グラフの接線の傾きを求める」	83
5.1.2 積分：「グラフ・x軸・区間が画す領域の面積を求める」	84
5.1.3 「微分と積分は逆の関係にある」にならない	85
おわりに	88

0. 導入

0.1 「微積分の意味を知る」ということ

0.2 「微積分」の意味の概要

0.3 テクストの構成

0.1 「微積分の意味を知る」ということ

「微積分の意味を知る」とは、「微積分」の数学的定義を知ることではない。

定義は、「形式」の観点から本質と定めたものの記述である。

その形式は、意味の抽象である。

そして意味とは、卑近な意味のこと、すなわち出处である。

「微積分」の出处は、運動解析である。

運動解析では、時間・距離・速さが対象化される。

さらに、〈経過時間—距離〉と〈経過時間—速さ〉の関係が問題にされる。

その問題はこうである：

「〈経過時間—距離〉と〈経過時間—速さ〉の関係は、
一方からもう一方が導かれるというものか？」

なぜこの問題が重要になるのか？

答えがもし「YES」なら、速さの加減が、目的とする移動を実現する方法になる。

アタリマエのことを問題にしているように聞こえるだろうか？

そう、アタリマエのことを問題にしているのである。

ただし、このアタリマエのことをきっちりやるとき、月着陸のロケットを飛ばす道も開けてくる。このアタリマエをやることは、たいしたことなのである。

こういうわけで、「微積分」の意味の学習は、端的に、つぎの内容の学

習である：

〈経過時間—距離〉と〈経過時間—速さ〉の関係は、
一方からもう一方が導かれるふうになっている。

この学習の中で、実際にやっていることの形式として、「微積分」が現れてくる。——〈経過時間—距離〉から〈経過時間—速さ〉を導くのが微分で、その逆が積分である。

この形式は、関数のことばを用いて定式化される。

そのことばは、「実数を定義域・値域とする関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$)」「 f の導関数」「 f の原始関数」「 $a \in D$ における f の変化率 / f のグラフの傾き」「 $a \in D$ における f の積分値 (定積分)」等である。

この形式化により、「微積分」の応用領域が、「微積分」の出处になったものから一挙に広がる。例えば、「面積・体積の求積」が「微積分の応用主題」のとらえになる。

数学の「微積分」の入門書は、第1頁をこの形式から始める。そこで、意味知らずの学習になるのもアタリマエ、ということになる。

高校数学の微積分にも、問題がある。

高校数学では、関数 f のグラフと x 軸の区間間の面積を求める計算を「積分」として導入し、そして「面積・体積の求積」へ進める具合になっている。そしてこの場合、積分と微分の対称的な関係が見えなくなってしまう。高校数学の微積分では「微積分」の意味を学習できないということである。

0.2 「微積分」の意味の概要

「微分・積分」の基本主題は、つぎのものである：

与えられた関数 f から、この導関数と呼ばれる関数 f' を導く。

与えられた関数 f から、この原始関数と呼ばれる関数 F を導く。

この数学でどのような応用を想定しているかという、つぎのものである：

ここに、「移動」の運動がある。この運動の記述として、つぎの2通りを考える：

A. 経過時間とこの間の移動距離の対応を記述する。

B. 経過時間とそのときの速度の対応を記述する。

(自動車には、走行距離計と速度計の二つのメータがついているが、これを用いれば上の2通りの記述ができることになる。)

このとき、Aの記述からBの記述を導くことができる。また、Bの記述からAの記述を導くことができる。

Aの記述からBの記述を導くのが、導関数を導くことにあたる。

Bの記述からAの記述を導くのが、原始関数を導くことにあたる。

与えられた関数 f からこの導関数 f' を導くのは、一つの計算式で行う。この操作を「微分」と呼ぶ。

移動の記述において「微分」に対応する概念は、「瞬間速度を求める」である。

与えられた関数 f からこの原始関数 F を導くのは、一つの計算式で行う。この操作を「積分」と呼ぶ。

移動の記述において「積分」に対応する概念は、「瞬間瞬間の移動距離を累積する」である。

「微分・積分」の「分」の意味は、「運動を切り分ける」である。

運動を切り分けることで、話がどんなふうに進展するのか？

切り分けた運動を、等速運動に近似する。

こうして、運動全体を「等速運動が合わさったもの」に近似する。

等速運動であれば、小学算数の内容——簡単な内容——になる。

運動の記述が、小学算数でできることを合わせる形で、できるようになる。

数学としての「微積分」は、ここでやっていることの形式化・体系化である。

形式化は、<出処になっている意味——卑近な意味>を消し去ることである。したがって、純粹に数学的に書かれた「微積分」の書は、意味を自分で補うことができはじめて、読めるものになる。そして上に述べたものが、このときの「意味」である。

0.3 テクストの構成

本テキストは、内容をつぎのように構成する：

1. 「微積分」の学習の要点を押さえる。

1.1 「微分と積分は逆の関係にある」をわかることが、「微積分」の学習の要点。

2. 「微積分」の出处である運動解析で、「微積分」の考え方をつかむ。

2.1 <経過時間—距離>と<経過時間—速さ>が「一方から他方が導かれる関係」であることを見る。

(1) <経過時間—距離>のグラフから<経過時間—速さ>のグラフを導く。

方法は、<経過時間—距離>のグラフを折れ線グラフで近似し、折れ線グラフに対応する<経過時間—速さ>の階段グラフを導く。

そして、「<経過時間—距離>のグラフは折れ線グラフによる近似の極限」に「階段グラフの極限が<経過時間—速さ>のグラフ」が対応することを見る。

(2) <経過時間—速さ>のグラフから<経過時間—距離>のグラフを導く。

方法は、<経過時間—速さ>のグラフを階段グラフで近似し、階

段グラフに対応する<経過時間—距離>の折れ線グラフを導く。
そして、「<経過時間—速さ>のグラフは階段グラフによる近似の極限」に「折れ線グラフの極限が<経過時間—距離>のグラフ」が対応することを見る。

ここで、折れ線グラフと階段グラフの対応づけの意味は、運動を局所的に「等速運動」と見るということである。そして、「等速運動」は、「時間と距離の比例関係」として小学算数の内容である。

2.2 <経過時間—距離>から経過時間 t における速さを導く。

<経過時間—速さ>から経過時間 t における移動距離を導く。

(1) <経過時間—距離>のグラフから経過時間 t における速さを導くことを主題にする。

ここまで暗黙にしてきた「なめらか（局所的に線形）」を、対象化する。

<経過時間—距離>のグラフから経過時間 t における速さを導く。

この形式を、式に表現する。

(2) <経過時間—速さ>のグラフ f から経過時間 t における移動距離を導く。

この形式を、式に表現する。

2.3 「速さ」の意味を考えることから、「局所的に線形」の概念をもつ。

0. 導入

3. ここまでの話を、関数解析の話に抽象する。

3.1 時間・距離・速さの意味を抜くことで、関数の話にできることを見る。

3.2 <経過時間—距離>のグラフから<経過時間—速さ>のグラフを導くときの形式、<経過時間—距離>のグラフから経過時間 t における速さを導くときの形式を、関数のことばで述べ直す。

「導関数」「変化率」「微分」「微分可能」等のことばを導入する。

3.3 <経過時間—速さ>のグラフから<経過時間—距離>のグラフを導くときの形式、<経過時間—速さ>のグラフから経過時間 t における移動距離を導くときの形式を、関数のことばで述べ直す。

「原始関数」「区分求積」「定積分」「積分」等のことばを導入する。

4. 関数解析の形式のことになった「微積分」の応用性を見る。

4.1 <経過時間—速さ>と<経過時間—加速度>の関係

4.2 面積・体積を求める形式

5. 学校数学の「微積分」がどのようになっているかを見る。

5.1 高校数学では、「グラフの接線の傾きを求める」が微分の内容になり、「グラフ・ x 軸・区間が画す領域の面積を求める」が積分の内容になる。特に、「微分と積分は逆の関係にある」にならない。

1. 「微積分」の学習の要点

1.1 「微分と積分は逆の関係にある」がわかる

1.1 「微分と積分は逆の関係にある」がわかる

つぎの問題は、ふつうにありそうな問題である：

- A. 決まった軌道を実行しなければならない。
しかも、各経過時間に対しそのとき通過する地点が決められている。
この運行を実現するには、どんなふうに運転していったらよいか？
- B. 運転をこのようにしていこうとする。軌道はどのようになるか？
特に、各経過時間に対しそのとき通過する地点はどのように決まっていけるか？

ここで、軌道を〈経過時間—移動距離〉に、運転を〈経過時間—速さ〉に、それぞれ表現する。

このとき上の問題はつぎのようになる：

- A. 与えられた〈経過時間—移動距離〉を実現するには、〈経過時間—速さ〉がどのようであればよいか？
- B. 与えられた〈経過時間—速さ〉は、どのようなく経過時間—移動距離〉を現すか。

この問題を考える中で、解決の手法が自ずと得られてくる。

これが、微分・積分である：

- A. 〈時間—距離〉から〈時間—速さ〉を導き出すとは「〈時間に対する距離の変化の形〉から〈時間に対する距離の変化率〉を求める」ことであり、そしてこの手法になるのが「微分」である。
- B. 〈時間—速さ〉から〈時間—距離〉を導き出すとは「〈時間に

対する距離の変化率〉から〈時間に対する距離の変化の形〉を求める」ことであり、そしてこの手法になるのが「積分」である。

微分と積分は、〈変化の形〉と〈変化率〉の間の方向が逆になっている。

また、つぎのようになる：

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{微分}} & \\ \langle \text{時間—距離} \rangle f & & \langle \text{時間—速さ} \rangle g \\ & \xleftarrow{\text{積分}} & \end{array}$$

「微積分」の学習の要点は、「微分と積分は逆の関係にある」がわかることである。そして、ここで示した「逆」が、「微分と積分は逆の関係にある」のイメージになるものである。

「微分と積分は逆の関係にある」の意味がわかったところで、〈距離—時間〉と〈速さ—時間〉の話をもさらに形式化する。すなわち、関数の話にする：

- A. 関数 f に「微分」（「変化の形から変化率を求める」）の方法を適用して新しい関数を導くことを、「 f の微分」という。
- B. 関数 f に「積分」（「変化率から変化の形を求める」）の方法を適用して新しい関数を導くことを、「 f の積分」という。

〈変化の形〉と〈変化率〉の間の方向を逆にするこの微分・積分では、さらにつぎのようになる：

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{微分}} & \\ \text{関数 } f & & \text{関数 } g \\ & \xleftarrow{\text{積分}} & \end{array}$$

1. 「微積分」の学習の要点

そして以上が、関数の話に形式化されたときの「微分・積分」における「微分と積分は逆の関係にある」の意味である。

2. 運動解析

——経過時間・移動距離・速さ

2.0 準備：「移動」の運動の記述

2.1 <時間—距離>と<時間—速さ>

2.2 特定時間における速さと距離

2.3 「速さ」とは？

2.0 準備：「移動」の運動の記述

この章は、「移動」の運動の解析が主題である。「移動」の運動のデータの記述・解析を考えようというわけである。

「移動」の運動の記述ということでは、小学校以来「時間と距離の対応」をやっている。

この対応を、表やグラフに表してきた。

さらに、この対応を「関数」としてとらえ、グラフを「関数グラフ」のように考えることもやっている。

ところが、この表やグラフの表現というのが、しくみ / 論理が存外難しい。

このしくみ / 論理を改めて問われて、数学的にきちんとと言える者は、ほとんどいないと見てよい。

そこで、この章の本題に入る準備として、表・グラフ表現のしくみ / 論理を最初に押さえておくことにする。

「移動」の運動のデータとしての「時間と距離の対応」は、意識としては、「時点と地点」の対応である。そして、「時点と地点の表現」「時間と距離の表現」の課題を（意識的あるいは無意識的に）処理して、データをつくっている。

すなわち、以下のように：

1. 時点と地点をつぎのように表現する：

時点を、「基準とする時点 O_T から時間 t だけ隔たった時点」

の形に表現する。

地点を、「基準とする地点 O_P から距離 d だけ隔たった地点」の形に表現する。

2. そして、「時点と地点」の対応を、データでは「時間と距離」の対応で記述する。

3. ここで「時間と距離」の対応の記述であるが、これはつぎのように処理している：

時間を、「単位とする時間 u_T の $\langle \text{数} \rangle$ 倍」の形に表現する。

距離を、「単位とする距離 u_D の $\langle \text{数} \rangle$ 倍」の形に表現する。

4. そして、「時間と距離」の対応を、データでは「単位 u_T に対する数値と単位 u_D に対する数値」の対応で記述する。

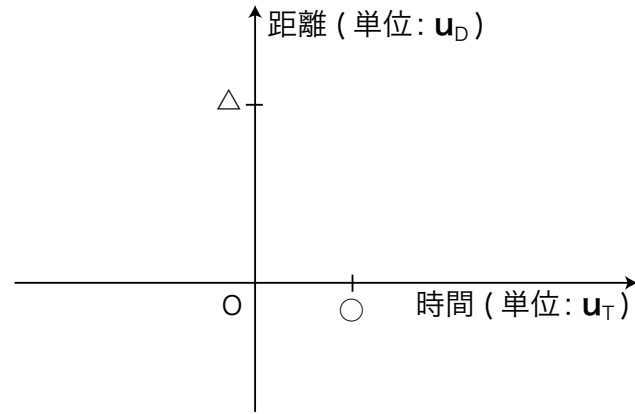
なお、時点の基準 O_T と地点の基準 O_P のとり方は任意であるから、時間 t 、距離 d は「有向」で考えることになる。

そしてこれより、単位 u_T に対する数値と単位 u_D に対する数値は、正負の数になる。——実際、ふつう実数で考えている。

このデータをグラフにするときは、さらに、 $\langle \text{時点—時間—数} \rangle$ と $\langle \text{地点—距離—数} \rangle$ を、直交するグラフの軸と同一視する作業を（意識的あるいは無意識的に）やっている。

「同一視」は、数学的にいえば「同型 (isomorphism) を立てる」ということである。

以上の作業によって、つぎの枠（座標系）に到達する：



○, Δは, 0でない任意の数。

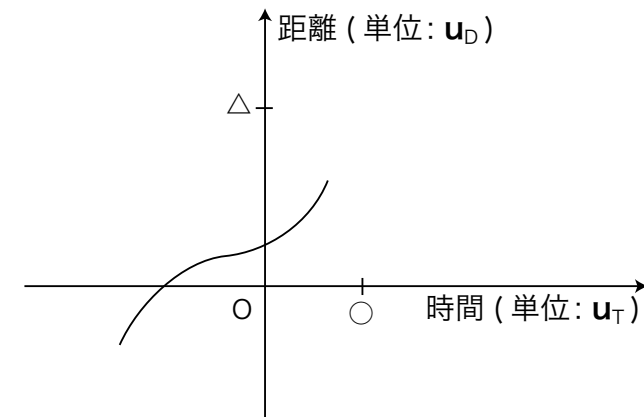
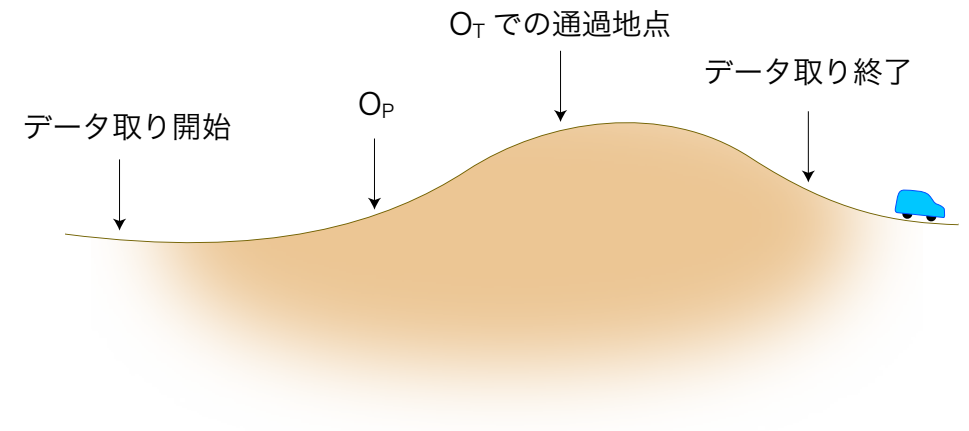
原点Oが, O_T と O_P の両方に対応。

そして以後, この枠にしたがって「移動」の運動のデータをグラフにしていく。

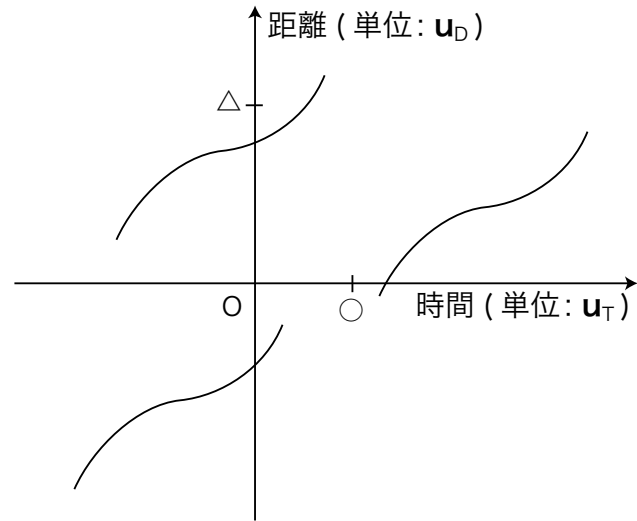
さて, グラフの始点は運動の起点ではない。データ採取の開始点である。
 初学者は「グラフの始点は運動の起点」と誤解する / 間違ふことが多いので, ここでしかと強調しておく。

運動のデータは, O_T , O_P のとり方に依存して数値が違ってくる。

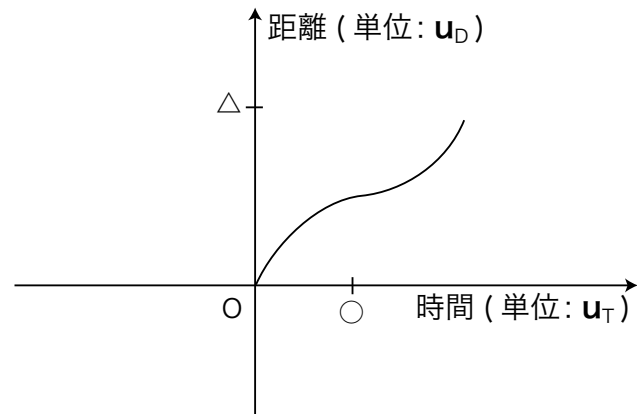
よって, グラフ枠でのグラフ曲線の位置も違ってくる。



一方, グラフ曲線の形は O_T , O_P のとり方に依らず同じであるから, O_T , O_P のとり方のいろいろには, 互いに平行移動して重なる関係にあるグラフ曲線のいろいろが対応する。



もっとも、通常はグラフの始点を枠の原点に設定するが、これは簡単・便利のためである。——この〈簡単・便利〉も、ここで述べてきたくしくみ / 論理〉の理解の上に了解されていることが必要である。



2.1 <時間—距離>と<時間—速さ>

2.1.1 <時間—距離><時間—速さ>の相互導出を問題化

2.1.2 ヒント：等速運動の場合

2.1.3 <時間—距離>から<時間—速さ>を導く

2.1.4 <時間—速さ>から<時間—距離>を導く

2.1.5 <時間—距離>と<時間—速さ>の対応の多対1関係

2.1.1 <時間—距離><時間—速さ>の相互導出を問題化

ここに、移動する物体がある。

この移動の記述として、つぎの2つを考える：

A. 経過時間に対するこれまでの移動距離を記録していく

B. 経過時間に対するそのときの速度を記録していく

ここで問題：この二つの記述はどんな関係にあるだろうか？

どうしてこの問題が出てくるかというと、一方が決まれば他方も決まるように思えるからである。

実際、経過時間に対する移動距離に違いの現れる箇所であれば、それは速さが違う箇所ということになる。また、経過時間に対する速さに違いの現れる箇所がであれば、それは移動距離が違う箇所ということになる。

そして、一方が決まれば他方も決まるということは、一方から他方を導く方法があるということではないか？

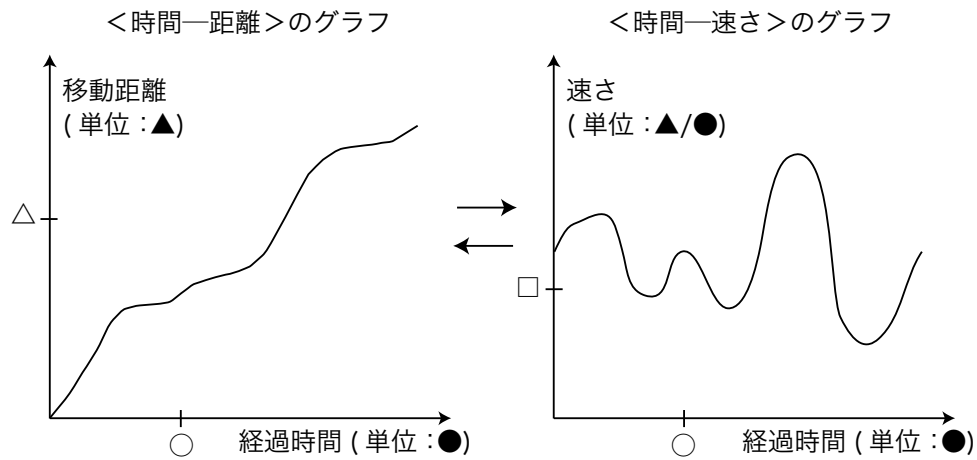
実際、この予想は正しい：

- ・ <時間—距離>から<時間—速さ>を導くことができる
- ・ <時間—速さ>から<時間—距離>を導くことができる

このことを、ここでつぎのように表現する：

- ・ <時間—距離>のグラフから<時間—速さ>のグラフを導くことができる

・<時間—速さ>のグラフから<時間—距離>のグラフを導くことができる

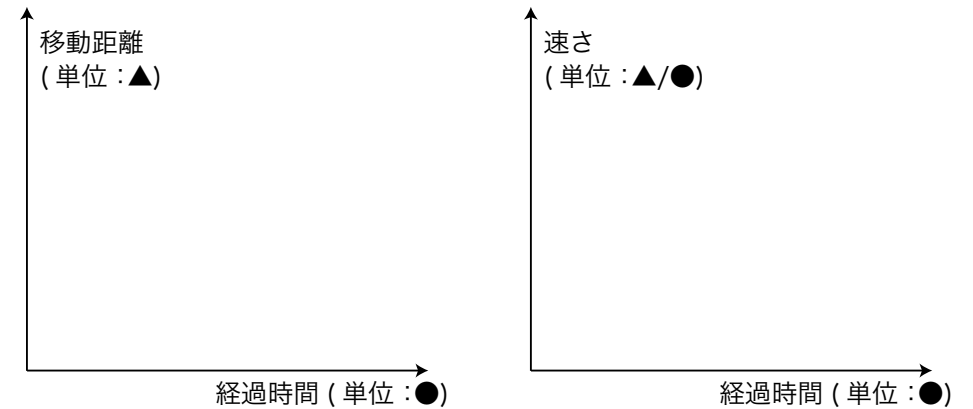


さて、<時間—距離>と<時間—速さ>の一方から他方を導く方法とは？

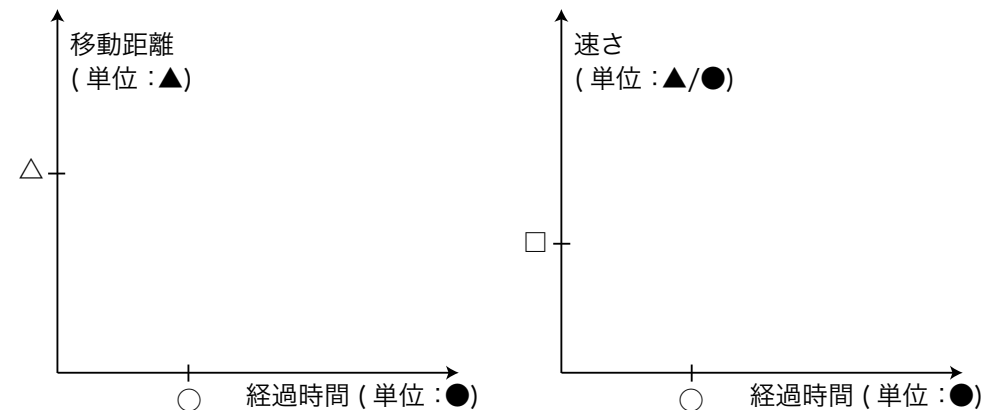
注：<時間—距離>，<時間—速さ>のグラフを描く手順

1. 時間，距離の単位を定める——それぞれ●，▲とする。
速さの単位を，▲/●に定める。

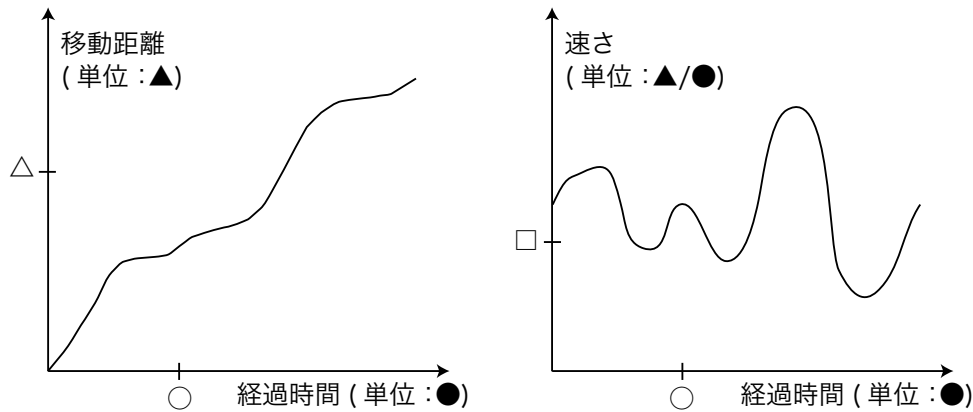
2. グラフの枠となる時間，距離，速さの軸を描く。



3. 「枠のスケールを定める」こととして，時間，距離，速さの各軸に適切な数値をおく——それぞれ○，△，□とする。



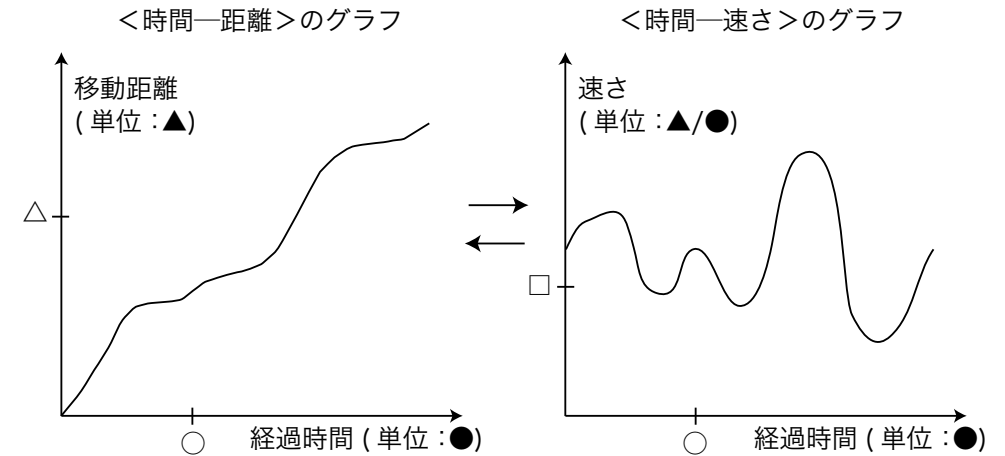
4. この枠にしたがって、<時間—距離>、<時間—速さ>のデータをプロットする。



「時間、距離、速さの軸を描きこれのスケールを定める」でやっていることは、<量>としての時間、距離、速さのそれぞれで、<量>としての長さとして「同型 (isomorphism)」を立てるということである。

2.1.2 ヒント：等速運動の場合

<時間—距離>と<時間—速さ>の一方から他方を導く方法は、いったい考えられるものなのか？

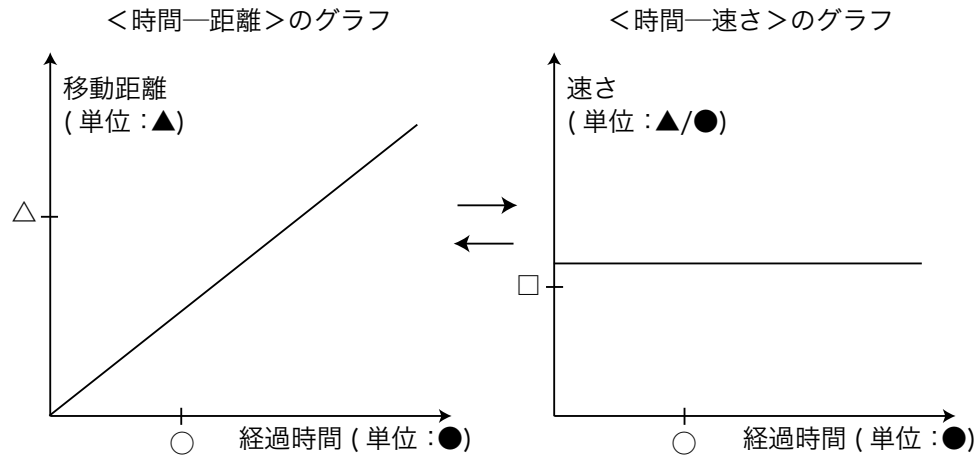


ヒントは、「等速運動の場合」である。

等速運動であれば、小学算数の比例関係の問題になる。実際、小学6年生はつぎのことができる：

- ・速さが一定のときの経過時間に対する移動距離を求める。
- ・経過時間と移動距離が比例しているときの速さを求める。

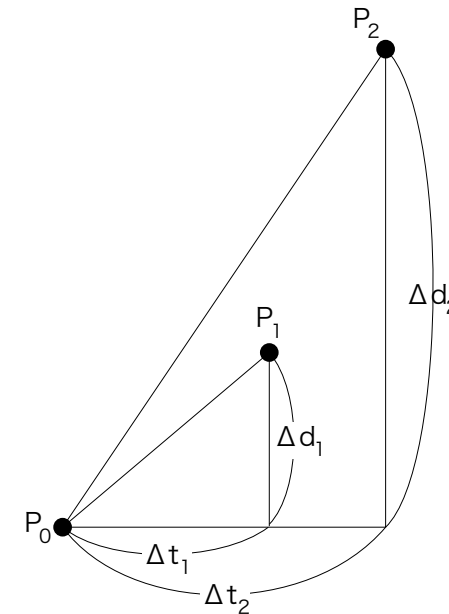
そしてこのときの<時間—距離>と<時間—速さ>のグラフの対応は、つぎのようになる：



さて、これがどんなヒントになるのか？

注：「等速」の<時間—距離>グラフが直線になるのはどうして？

グラフ上の任意の3点 P_0 , P_1 , P_2 が、直線上に並ぶことを示す。
この3点に対しつぎの数値 Δt_1 , Δt_2 , Δd_1 , Δd_2 を考える：



「等速」なので、 $\Delta t_1 : \Delta t_2 = \Delta d_1 : \Delta d_2$ 。

これは、図の二つの三角形が相似（あるいは、直線 $P_0 P_1$ と直線 $P_0 P_2$ の傾きが同じ）ということ。

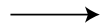
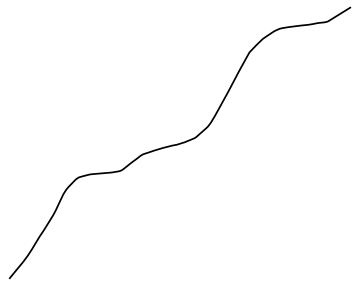
特に、3点 P_0 , P_1 , P_2 は直線上に並ぶ。

2.1.3 <時間—距離>から<時間—速さ>を導く

<時間—距離>のグラフから<時間—速さ>のグラフを導く方法を考えるのに、「等速運動」がヒントになるとは？

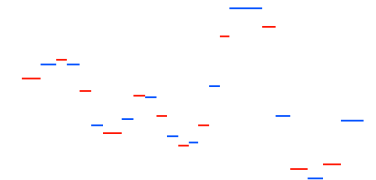
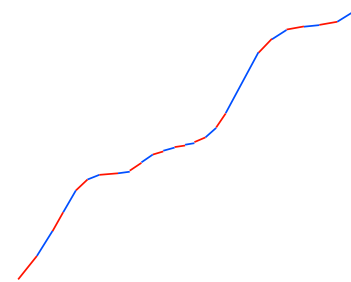
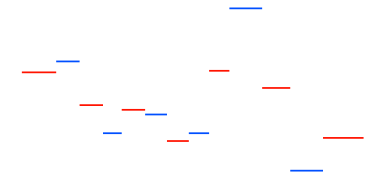
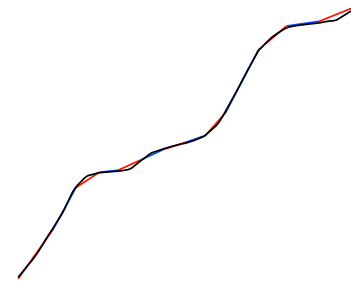
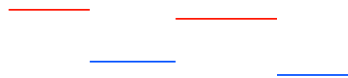
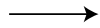
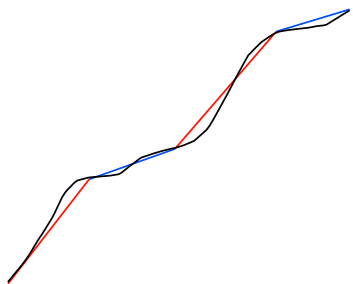
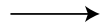
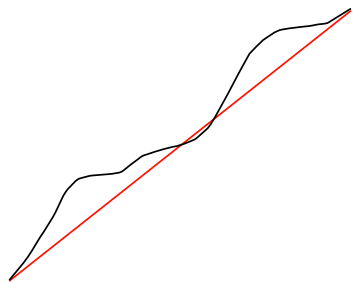
<時間—距離>のグラフ

<時間—速さ>のグラフ

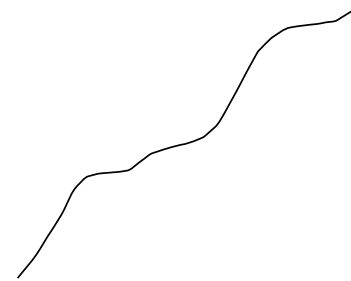


?

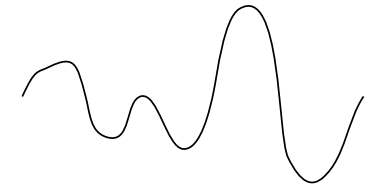
このヒントの使い方は、「<時間—距離>のグラフを、区間区間で等速運動になるように近似する」、すなわち「<時間—距離>のグラフを、折れ線グラフに近似する」である：



\lim



\lim



時間を細かく区切り近似の精度を増していくことで、求めるグラフの十分な形が得られる。

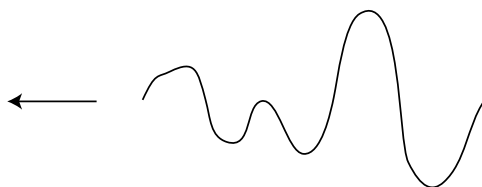
2.1.4 <時間—速さ>から<時間—距離>を導く

<時間—速さ>のグラフから<時間—距離>のグラフを導く方法を考えるのに、「等速運動」がヒントになるとは？

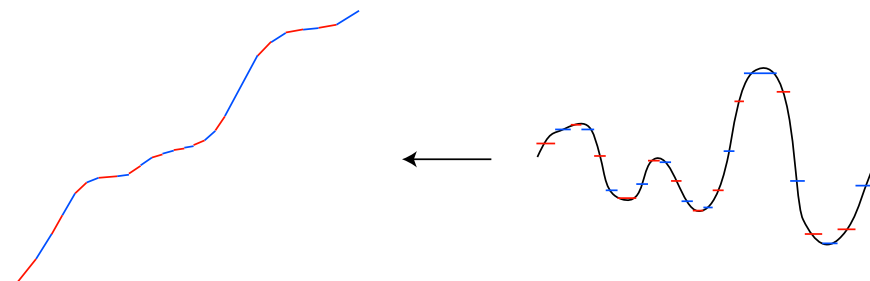
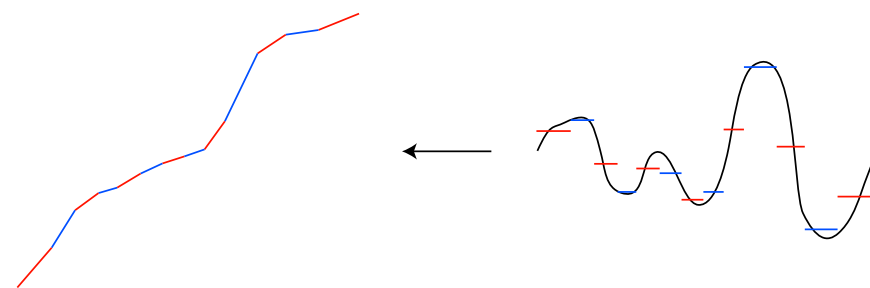
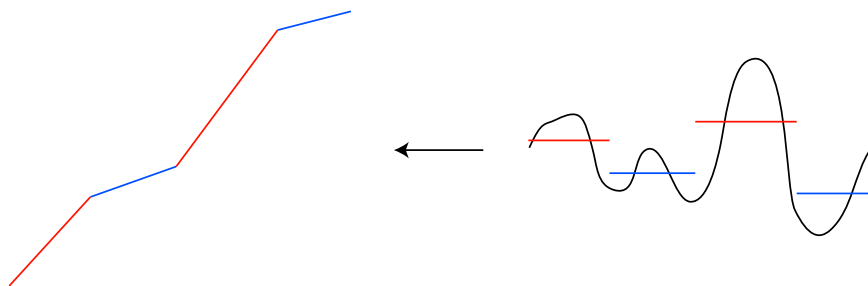
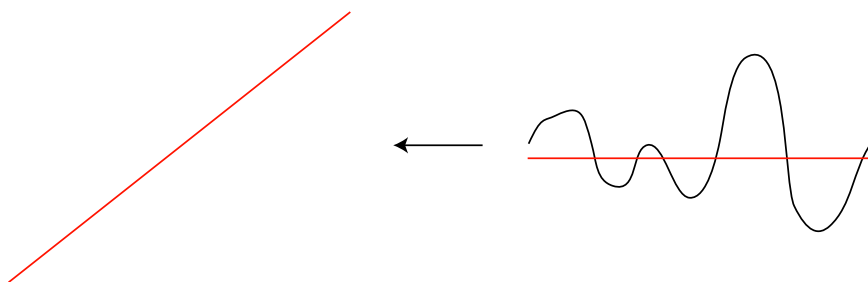
<時間—距離>のグラフ

<時間—速さ>のグラフ

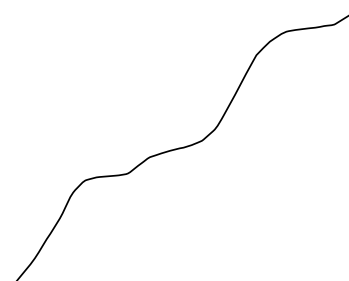
?



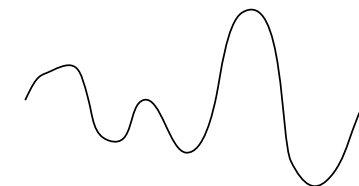
このヒントの使い方は、「<時間—速さ>のグラフを、区間区間で等速運動になるように近似する」、すなわち「<時間—速さ>のグラフを、階段グラフに近似する」である：



\lim



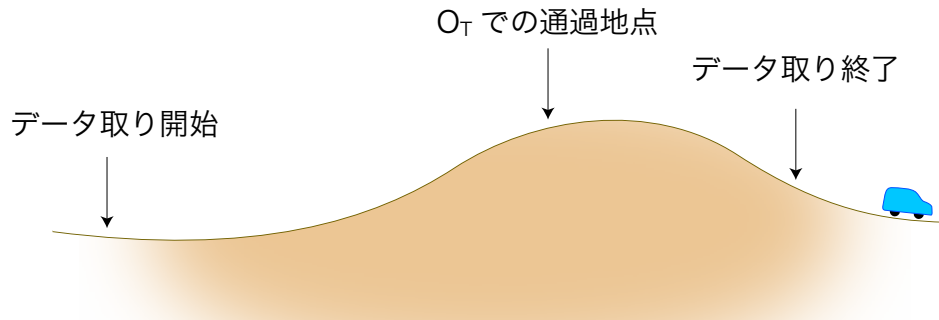
\lim



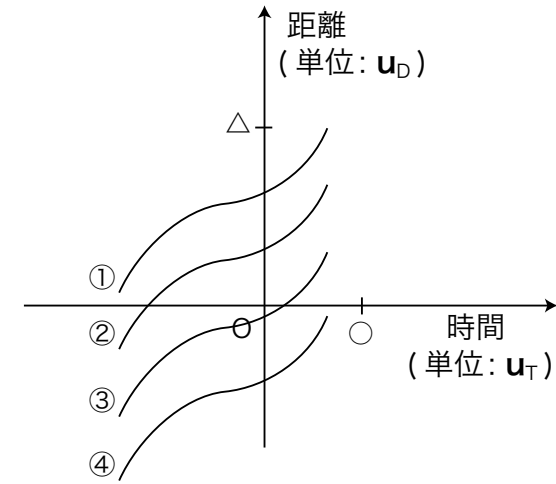
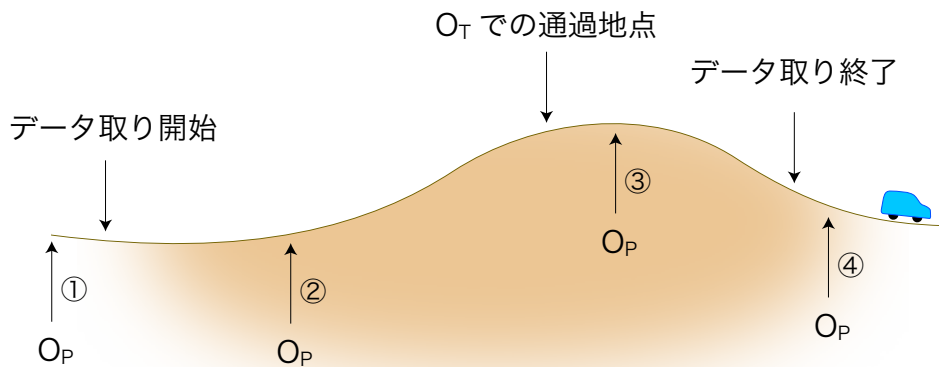
時間を細かく区切り近似の精度を増していくことで、求めるグラフの十分な形が得られる。

2.1.5 <時間—距離>と<時間—速さ>の対応
の多対1関係

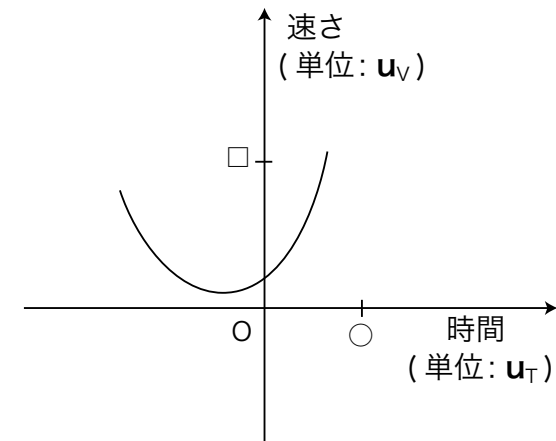
いま、時刻の基準 O_T を定め、そして運動のデータ取りの開始と終了時刻を定める：



<時間—距離>のグラフは、基準とする地点 O_P のとり方を違えることで、上下に平行移動する：

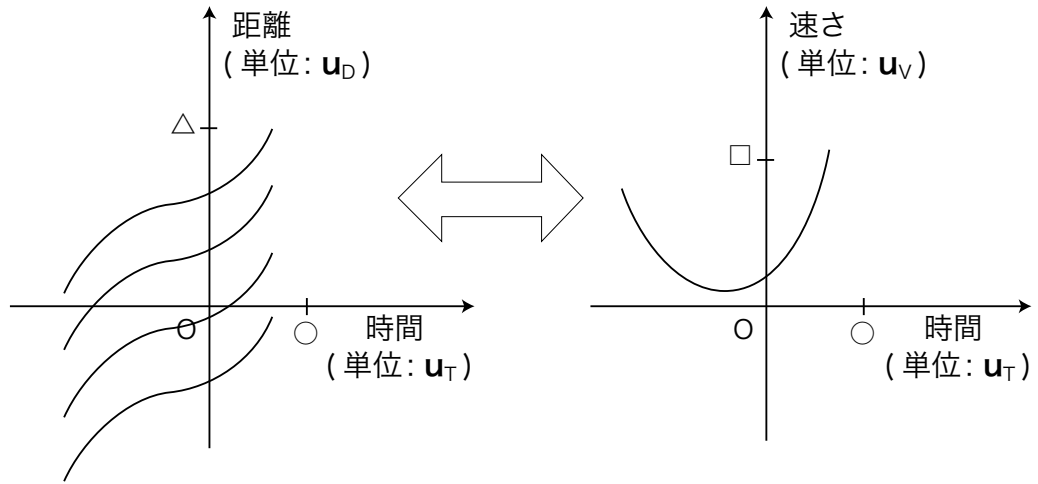


一方、<時間—速さ>のグラフは、 O_P のとり方に依らず、一つに定まる：



つまり、<時間—距離>と<時間—速さ>のグラフの対応は、多対1になる：

2. 運動解析——經過時間・移動距離・速度



2.2.1 <時間—距離>から特定時間における速さを導く

この内容は、「速さ」の意味を定めることと同じである。そこで、節を改めて、次節の「速さ」とは？」でこれを論ずる。

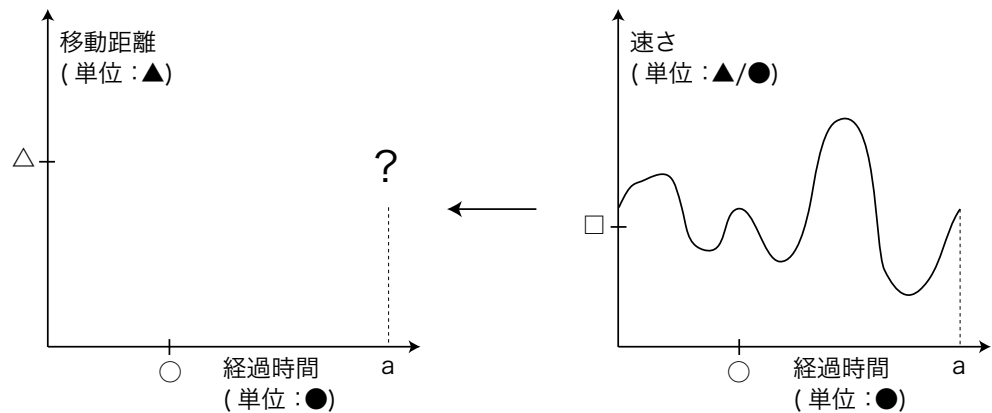
2.2 特定時間における速さと距離

2.2.1 <時間—距離>から
特定時間における速さを導く

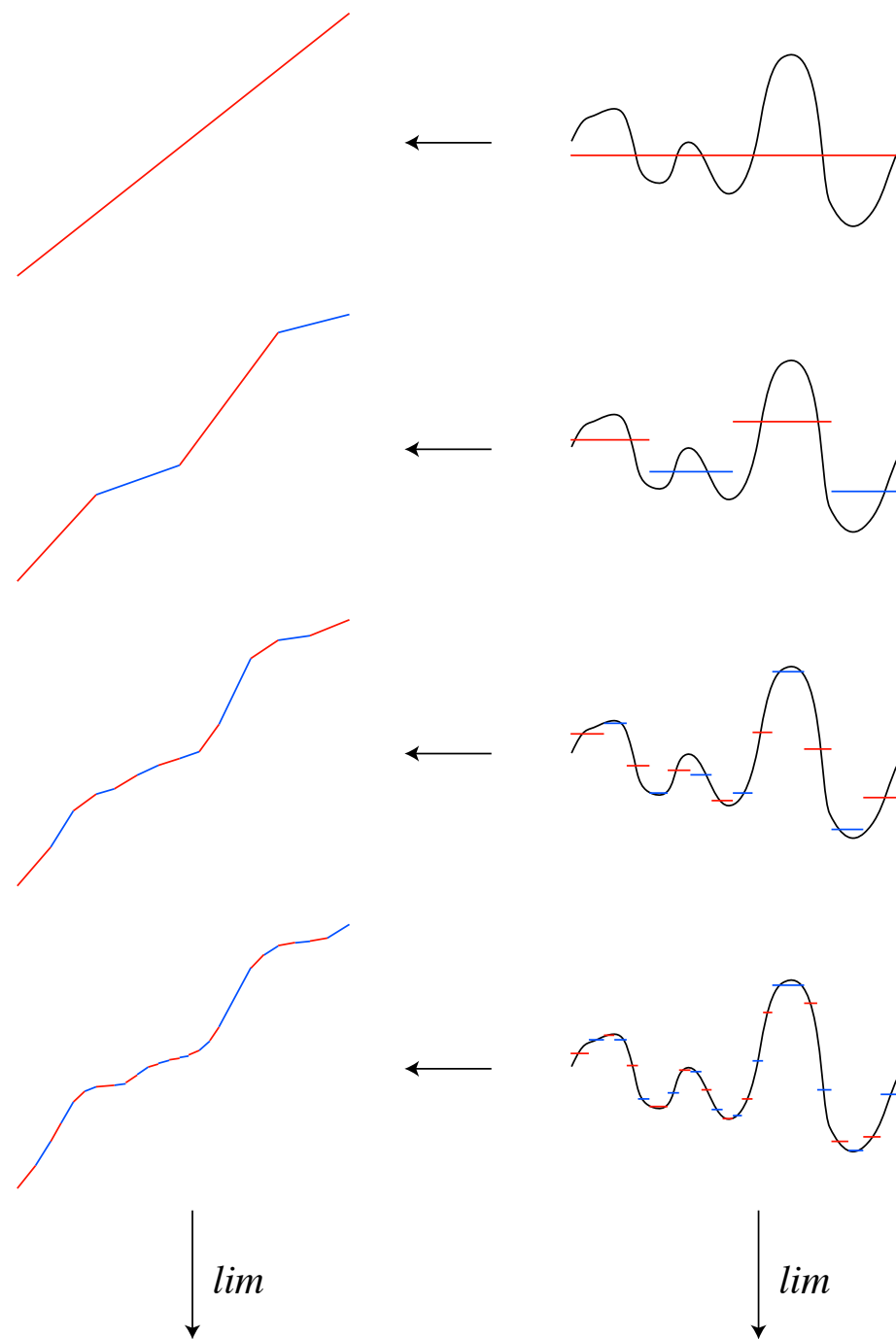
2.2.2 <時間—速さ>から
特定時間における距離を導く

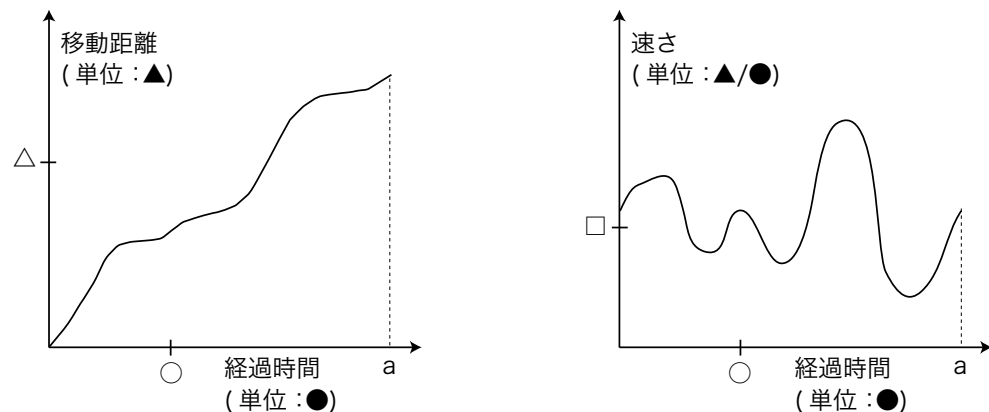
2.2.2 <時間—速さ>から特定時間における距離を導く

<時間—速さ>のグラフから「経過時間 a における移動距離」を求めることを考える。



求め方は、<時間—速さ>のグラフから<時間—距離>のグラフを導いたやり方と同じである。すなわち、つぎの「近似の精度を上げていく」を実行する：





2.3 「速さ」とは？

この手順を、式に表現してみる。

k 番目の近似になるところの階段グラフを、 G_k とする。

G_k において、各階段の幅の値と速さの値を、 $\Delta t_k, v_k$ ($k = 1, \dots, n$) とするとき、 G_k に対応する〈時間—距離〉の折れ線グラフの a における値は、つぎの式で求められる：

$$v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \cdot \Delta t_2 + \dots + v_n \cdot \Delta t_n$$

あるいは、 Σ (シグマ) の記号を用いて：

$$\sum_{k=1}^n v_k \cdot \Delta t_k$$

そこで、「時間の区分を細かくする」によって近似の精度を上げていったときの極限は、 \lim の記号を用いたつぎの式になる：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k \cdot \Delta t_k$$

2.3.1 「速さ」はどう定義されるもの？

2.3.2 速さの「ある・なし」

2.3.3 「速さがある」: 運動がなめらか (局所的に線形)

2.3.1 「速さ」はどう定義されるもの？

前節の「<時間—距離>と<時間—速さ>」では、実は雑ばくな言い方がされている。

特に、<時間—距離>のグラフから<時間—速さ>のグラフを導く方法を、

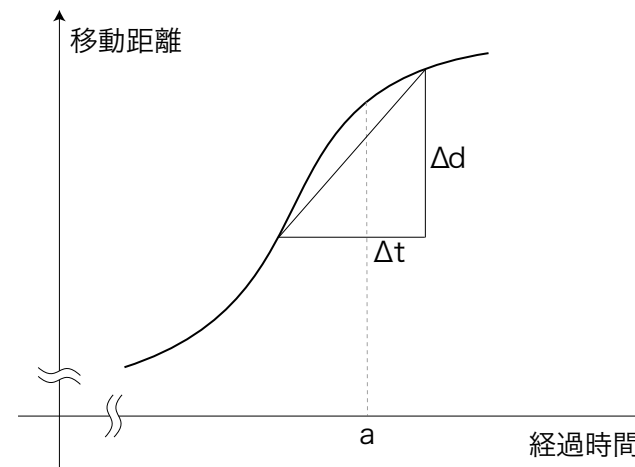
「<時間—距離>のグラフを折れ線グラフに近似し、
その折れ線グラフに対応する<時間—速さ>の階段グラフを描く。」

としたが、折れ線の角の点に対応する階段グラフの点は、存在しない。実際、折れ線の角の点は、<その前後で速さが変わる点>である。

そこで、<その前後で速さが変わる点>をどう処理したらよいかという問題になる。そして、この問題を適切に処理できるためには、改めて「速さ」の意味を問い、「速さ」の意味をはっきりさせる必要がある。

経過時間 a における速さは、つぎのように定義される：

1. a の前後の経過時間 $t_1 < t_2$ をとる。
 $\Delta t = t_2 - t_1$ とおく。
2. t_1 から t_2 の間の移動距離を Δd とする。
3. $\Delta d / \Delta t$ は、 t_1 から t_2 の間の平均の速さということになる。



4. このように Δt , Δd をとっていったときに

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

が存在する場合、これを a における速さ（速度）と呼ぶ。

2.3.2 速さの「ある・なし」

速さの定義において

「 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$ が存在する場合」

という言い方をした。これは、存在しない場合があるためである。

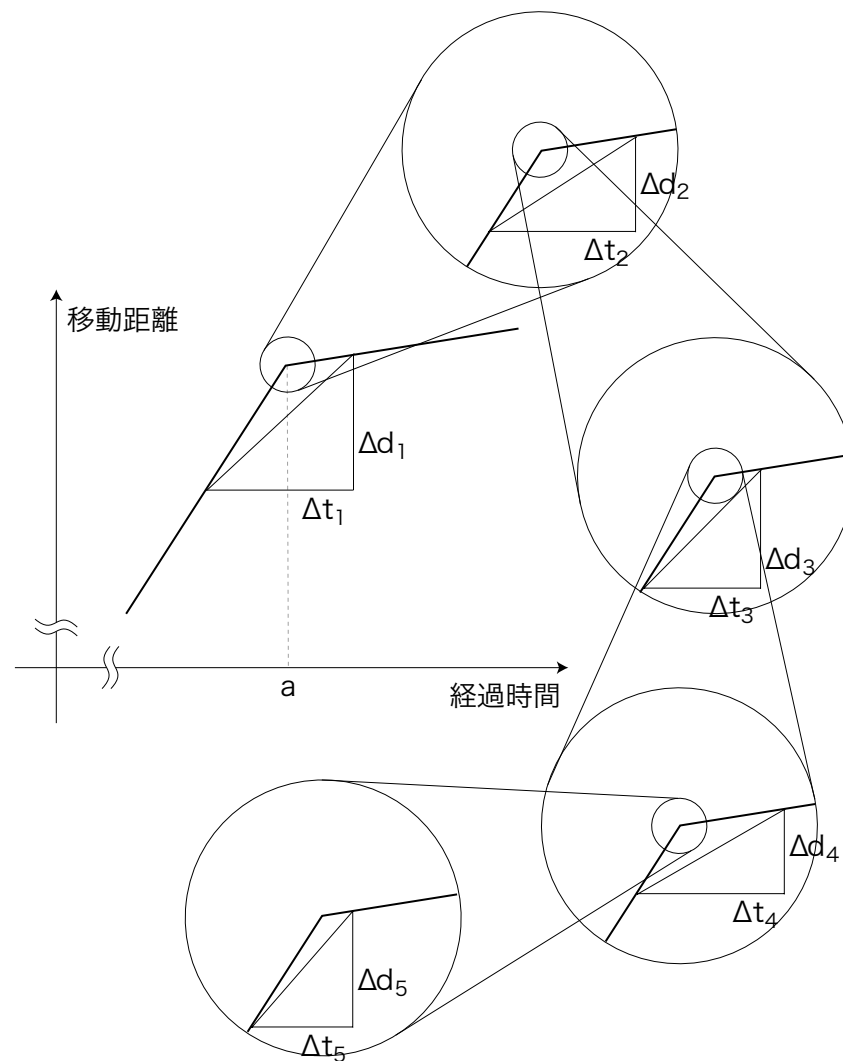
実際、速さがその前後で変わるところでは、速さは存在しない。
特に、〈時間—距離〉のグラフを折れ線で近似したときの折れ線の角にあたる場所では、速さが存在しない。

このことを説明するのが、次頁の図である。

$\Delta d_k / \Delta t_k$ ($k = 1, 2, \dots$) がとる値は、 a より前の速さの値 (v^- とする) と a より後の速さの値 (v^+ とする) の間であるが、この間の任意の値をとることができる。

またこのことから、〈時間—距離〉の折れ線グラフに対応して〈時間—速さ〉の階段グラフをつくるときは、折れ線の角にあたる経過時間 a の速さは、 v^- と v^+ の間に設定することになる。

そして便利を考えると、この値は、 v^- か v^+ に設定することになる。



2.3.3 「速さがある」：運動がなめらか（局所的に線形）

経過時間 a における速さがあるとは、つぎのようになっているということである：

1. a の前後の経過時間 $t_1 < t_2$ をとる。
 $\Delta t = t_2 - t_1$ とおく。
2. t_1 から t_2 の間の移動距離を Δd とする。
3. このように Δt , Δd をとっていったときに

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

が存在する。

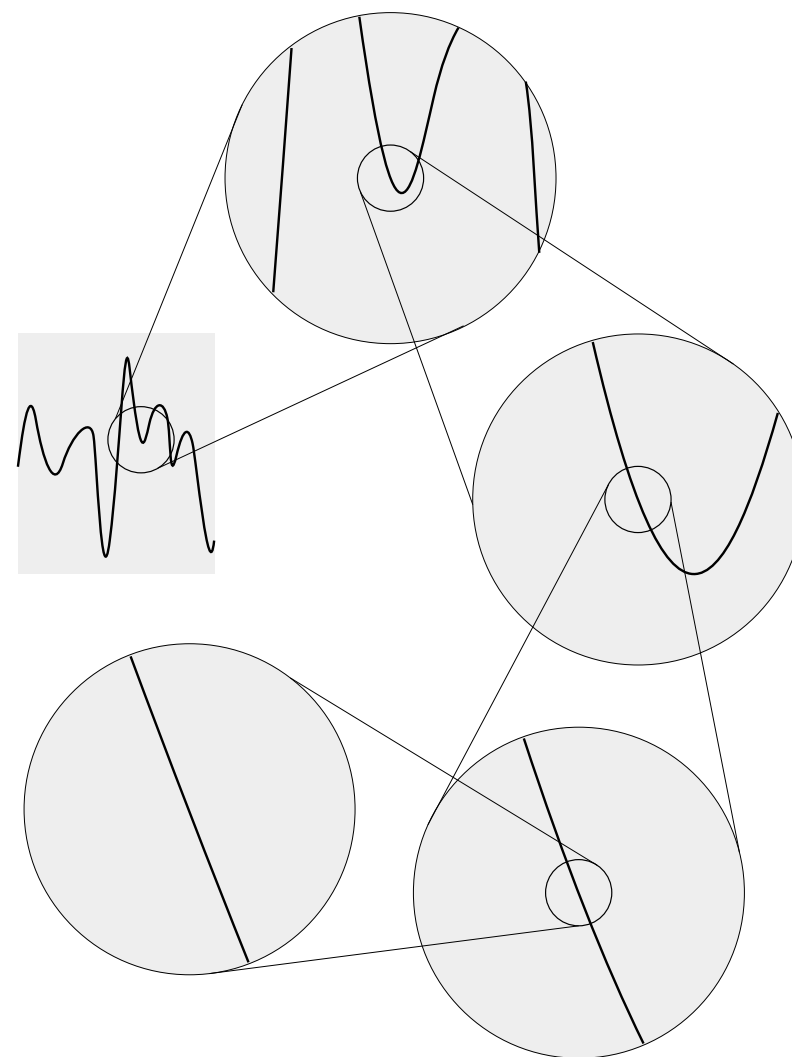
そして、 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$ が a における速さである。

これは、 a の近傍では速さ v の等速運動になっているということを意味する。

そしてこれは、〈時間—距離〉のグラフが a において「局所的に線形」ということである。

「局所的に線形」は、連続であって角（かど）がない状態、すなわち「なめらか」な状態である。「なめらか」は、「局所的に線形」の意味で数学用語になっている。

「なめらか」と「局所的に線形」の符合：



3. 運動解析から関数解析へ——微積分

3.1 運動解析の方法を数学に

3.2 微分

3.3 積分

3.1 運動解析の方法を数学に

3.1.1 運動を関数に

3.1.2 「<時間—距離> → <時間—速さ>」が微分に

3.1.3 「<時間—速さ> → <時間—距離>」が積分に

3.1.1 運動を関数に

数学は、形式の学である。形式としていろいろなことに使えそうなもの、ものごとの体系化に役立ちそうなもの、意味深なもの、含蓄の豊かなもの、おもしろそうなもの、等々を、数学としてつくる。

一般に、形式の素材は<卑近>である。

微積分は、運動解析を<卑近>にして、これの形式を数学にしたものである。

<卑近>から形式を抽出することの意義はいろいろあり、これについて論じ始めれば簡単な内容では済まない。そこでここでは、<運動解析 → 微積分>の数学化の場合によくあてはまるつぎの2点をあげておく：

- ・形式の抽出が、本質の抽出になっている。
- ・形式の抽出は、「この形式をもつもの / もてるもの」の対象化に進む。そして、物事の新しい関係づけに進む。

<運動解析 → 微積分>の数学化は、運動を関数に変え、運動解析を関数解析に変えるものである。——対象とする関数は、実数が定義域・値域の関数： $D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$)。

このとき、運動解析の

$$\text{「<時間—距離>} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \text{<時間—速さ>」}$$

は、関数 f に関するつぎのものになる：

$$\text{「} f \text{の原始関数} \leftarrow f \rightarrow f \text{の導関数」}$$

「互いに他を導く二つの対象」の形を、「一つの対象から導かれる二つの対象」の形に変えることになるわけである。

3.1.2 「＜時間—距離＞→＜時間—速さ＞」が微分に

＜運動解析 → 微積分＞の数学化では、「＜時間—距離＞→＜時間—速さ＞」の形式化が微分になる。（§3.2 微分）

3.1.3 「<時間—速度>→<時間—距離>」が積分に

<運動解析 → 微積分>の数学化では、「<時間—速度>→<時間—距離>」の形式化が積分になる。(§3.3 積分)

3.2 微分

3.2.1 局所的に線形, なめらか, 接線, 変化率

3.2.2 導関数

3.2.3 「微分する」「微分可能」

3.2.1 局所的に線形, なめらか, 接線, 変化率

関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) が $a \in D$ において「局所的に線形」ということ、すなわち f が a の近傍で 1 次関数に収束するという、を考える。——以下、この 1 次関数を f_a とする。

「局所的に線形」は、つぎのような見方ができる：

- A. f は、点 $(a, f(a))$ においてなめらか。
(実際、「なめらか」は、「局所的に線形」の意味で数学の用語になる。)
- B. f は、点 $(a, f(a))$ において接線をもつ。——実際、 f_a がこの接線。
- C. f_a は、 f の a における変化のぐあいを示している。——変化のぐあいの表現として f_a の傾きを用いることができる。

f_a の傾きは、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

である。C の見方に立って、これを「 f の a における変化率」と呼ぶ。

3.2.2 導関数

いたるところなめらかな関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) に対し、これから導かれるつぎの関数を、 f の導関数と呼び、 f' で表す：

$$x \longmapsto f \text{ の } x \text{ における変化率 } (x \in D)$$

3.2.3 「微分する」「微分可能」

関数 f の a における変化率が存在するとき、これを求めることを「 f を a において微分する」という。

特に、 f の a における変化率が存在することが、 f が a において微分可能ということである。

いたるところ微分可能な関数 f に対し、 f の導関数 f' を求めることを「 f を微分する」という。

「いたるところ微分可能」が、このときの「微分可能」の十分条件である。

3.3 積分

3.3.1 区分求積

3.3.2 原始関数

3.3.3 定積分

3.3.4 不定積分

3.3.5 「積分する」

3.3.1 区分求積

「<時間—速さ>から特定時間における距離を導く」では、つぎの式が導かれた：

$$\sum_{k=1}^n v_k \cdot \Delta t_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k \cdot \Delta t_k$$

<時間—速さ>を関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) と区間 $[a, b] \subset D$ の話に一般化するとき、上の式に対応する内容はつぎのようになる：

1. f は、ある関数 $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ とつぎのように関係している：
各 $x \in D$ に対し、 $f(x)$ は F の x における変化率。
(すなわち、 f は F の導関数。)
2. 区間 $[a, b]$ における F の増分を、 f を用いて求めることを考える。
その方法として、区間 $[a, b]$ の区分

$$a = x_1 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 1, \cdots, n-1)$$
 に対するつぎの式を、求める値の近似式と見る：

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

そして、この式を「 f を区間 $[a, b]$ において区分求積する」と読む。「求積」の用語の根拠は、「増分を少しずつ積むやり方で、全体の増分を求める」の内容になっているからである。

3. この区分を限りなく細かくしていったときの

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

が、求める全体の増分になる。

3.3.2 原始関数

関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) に対し、これがある関数 $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ とつぎのように関係していると見る：

各 $x \in D$ に対し、 $f(x)$ は F の x における変化率。
(すなわち、 f は F の導関数。)

ここで、区間 $[a, b] \subset D$ を考える。

区間 $[a, b]$ の区分

$$a = x_1 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 1, \cdots, n-1)$$

を限りなく細かくしていったときの

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

は、区間 $[a, b]$ での F の増し分になる。

そこで、 $F(a) = C$ とおくと、つぎのようになる：

$$F(b) = C + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

さらに、区間 $[a, b]$ の b を変数 x として考えれば、つぎのようになる：

$$F(x) = C + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

$$a = x_1 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

以上の内容は、つぎのように捉え直すことができる：

f を導関数とする関数が存在する。

実際、それは、任意の定数 C と $a \in D$ に対し定義されるつぎの関数である：

$$x \longmapsto C + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k \quad (x \in D)$$

(ここで、 $a = x_1 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$)

f を導関数とする関数の存在することがわかったところで、このような関数を「 f の原始関数」と呼ぶ。

「 f の原始関数」は、ただ一つの関数ではない。 C に依存して、無限にある。

3.3.3 定積分

関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) と区間 $[a, b] \subset D$ に対して定まるつぎの対象は、微積分では何度も使うことになる：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

$$a = x_1 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 1, \cdots, n-1)$$

そこでこれのより簡便な表現ということで、つぎの表現が導入される：

$$\int_a^b f(x) dx$$

そして、これを「区間 $[a, b]$ における f の定積分」と呼ぶ。

「定積分」の「定」の字は、この後導入される「不定積分」と明示的に区別するためのものである。

定積分の記号表現は、区分求積の極限の表現をなだらかに変形したものになっている：

- ・ \lim と Σ を、 S を上下に延ばした記号（「積分記号」と呼ぶ）に変える。
 S は sum (和) の S であり、 Σ はギリシャ文字の S であった。
- ・ Δ を、 d に変える。
 d は difference (差) の d であり、 Δ はギリシャ文字の d であった。

なお、 f の原始関数 F に対し、定積分の定義から

$$F(a) + \int_a^b f(x) dx = F(b)$$

となるので、特に、つぎの等式が立つ：

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

3.3.4 不定積分

関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) の原始関数は、任意定数 C と $a \in D$ を用いて、つぎのように表すことができる (\rightarrow §3.2.2 原始関数, §3.3.3 定積分):

$$x \longmapsto C + \int_a^x f(x) dx \quad (x \in D)$$

ここで、 C と積分記号上下の x , a は、実質的に機能していない。そこで、これらの記号の解釈を暗黙にして、つぎの記号を f の原始関数の表現にする:

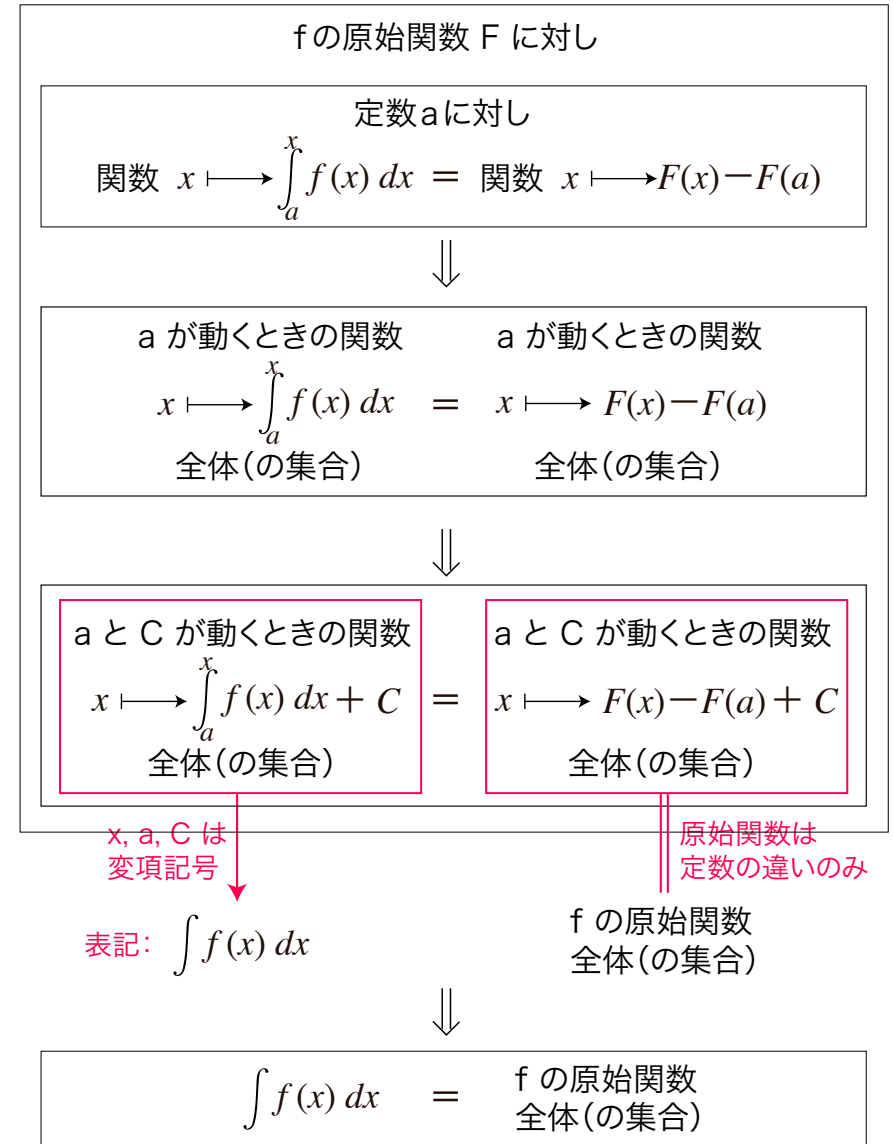
$$\int f(x) dx$$

そして先の積分の記号法

$$\int_a^b f(x) dx$$

とこの記号法を、それぞれ「定積分」「不定積分」の呼び名で区別する。

<不定積分の記号導出> と <不定積分=原始関数全体の集合> の推論



3.3.5 「積分する」

関数 f の原始関数を求めようとするときは、求める原始関数をひとまず不定積分の形に表現する。このことから、関数 f の原始関数を求めることを、「 f を積分する」という。

不定積分の記号法は、原始関数を対象化する方法になっている。

4. 微積分の応用性

4.1 「微積分の応用性」の構造

4.1 「微積分の応用性」の構造

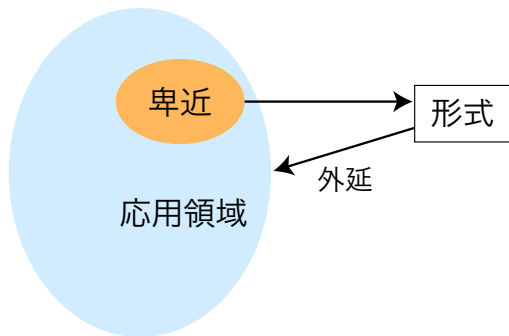
微積分の出処は、卑近である。

卑近から、微分積分の形式：

関数 f に対するこれの導関数

関数 f に対するこれの原始関数が導かれる。

そして、ひとたび形式が定立されると、形式の外延が、これの出処となった卑近を超える広大な領域として考えられてくる：



即ち、〈形式の応用〉のステージの展開になる。

実際、事象が〈変化〉の相で関数と捉えられ、さらにこれの変化率が捉えられるところは、微積分の応用領域になる。

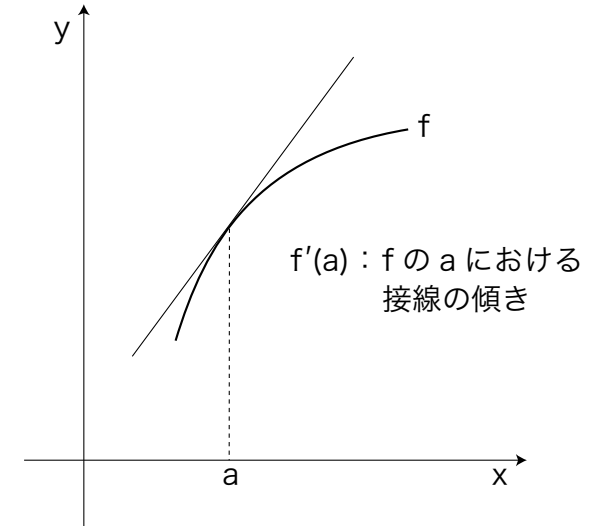
こうして、自然・人文・社会の諸科学のさまざまな分野に、微積分が登場することになる。

5. 学校数学の「微積分」

5.1 高校数学の「微積分」

5.1.1 微分：「グラフの接線の傾きを求める」

高校数学の「微積分」では、グラフの接線の傾きを求めることが「微分」である教えられる：



5.1 高校数学の「微積分」

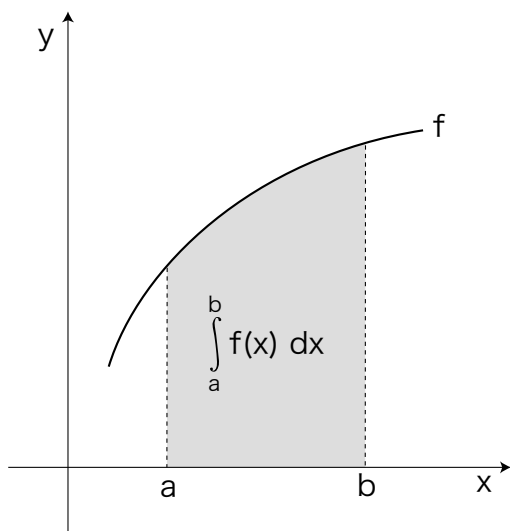
5.1.1 微分：「グラフの接線の傾きを求める」

5.1.2 積分：「グラフ・x軸・区間が画す領域の面積を求める」

5.1.3 「微分と積分は逆の関係にある」にならない

5.1.2 積分：「グラフ・x軸・区間が画す領域の面積を求める」

高校数学の「微積分」では、グラフとx軸と区間で画される領域の面積を求めることが「積分」である教えられる：



5.1.3 「微分と積分は逆の関係にある」にならない

高校数学の「微積分」では、

「グラフの接線の傾きを求めることが、微分」

「グラフとx軸と区間で画される領域の面積を求めることが、積分」と教えられる。

こんなふうに教えられた生徒は、微分と積分がつぎの逆の関係にあることを知らない者になる：

$$\begin{array}{ccc} \text{関数 } f & \text{— (微分：変化から変化率を導く) —} & \text{関数 } g \\ & \text{← (積分：変化率から変化を導く) —} & \end{array}$$

では、微分と積分が逆の関係にあることが教えられていないかということではなく、「逆の関係」がつぎのように教えられる：

「関数 f の積分とは、微分して f になる関数を求めること」

これは、「積分」を2通りに定義していることになる：

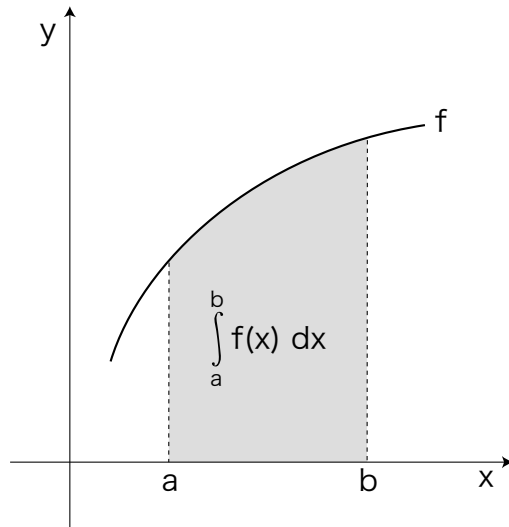
「グラフとx軸と区間で画される領域の面積を求めることが、積分」

「関数 f の積分とは、微分して f になる関数を求めること」

したがって、本来なら、この2つの定義の関係づけを指導内容にしなければならない。しかし、高校数学の「微積分」では、これも行われない。

5. 学校数学の「微積分」

註：関数 f のグラフと x 軸と区間 $[a, b]$ で画される領域の面積を求めることが、どうして f の $[a, b]$ における定積分を求めることと同じになるのか？



それは、この定積分を求める区分求積の形が、面積を求める形になるからである：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

$$a = x_1 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 1, \cdots, n-1)$$

この二つのことの符合は、どうしてか？

f が、 f と x 軸ではさまれる面積の変化率になるからである。

おわりに

微分積分の意味は、専門数学の立場から書かれる『微積分入門』があまり扱わない（扱っても、簡単に過ぎてしまう）ところのものである。

学校数学の「微分積分」も、グラフの傾きと求積の話になっていて、微分積分の本質である「逆の関係にある」を扱っていない。

結果、「微分積分の意味は？」と問われると、大多数がまったく答えられないか、あるいは満足に答えられない。「微分積分の意味」という主題の立て方がされるのを見たことがなければ、当然こうになってしまう。

そこで、微分積分の意味に終始する『微積分入門』をつくった。

専門数学の立場から書かれる『微積分入門』は、本テキストの内容の後に続くものである。

本テキストでも、続編として一般的『微積分入門』をつくれれば「完備」の点ではよいかも知れないが、それはいかにもお節介というものだろう。というわけで、ここで一応の締めとする。

宮下英明 (みやした ひであき)

1949年、北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て、現在、北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

註：本論考は、つぎのサイトで継続される（この進行に応じて本書を適宜更新する）：

<http://m-ac.jp/me/subjects/calculus/introduction/>

「微積分」入門——「微分積分」の意味

2010-11-28 初版アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者 宮下英明

サーバ m-ac.jp

<http://m-ac.jp/>

m@m-ac.jp
