現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための

図解

「数」がわかる本 シリーズ

数学編 (2)

いろいろな数が
つくられるしくみ

北海道教育大学教授
宮下英明 著

「数」がわかる本 数学編 (2)

いろいろな数がつくられるしくみ

本書のタイトルについて

本書のタイトルには「現職教員・教員養成コース学生‥‥のための」とあります。実際，本書は，現職教員・教員養成コース学生を直接の対象として書かれています。

学校数学と数学は違います。学校数学は，いわば，学習者に対する数学のインターフェイスです。学習者にとにかく食べてもらえるよう，手練手管がいろいろ施されています。
しかし，学校数学そのものは，自身がインターフェイスであること，手練手管の混淆であることを, おもてに見せません。結果, 学習者に（そして教師にも）自己完結的なもののように受け取られることになります。

学校数学は「妥協の産物」です。したがって，そこで教えている論理 (理屈) を改めて問い直すことをすれば，たちまち混沌の中に入ってしまいます。この混沌を整理できるのは，学校数学の中ではなくて数学の中です。

本書は,「数」に関して，学校数学がインターフェイスとして本来導こうとしている数学本体を解説しようとするものです。

読者は，本書の中で，自分が小・中・高の学生のときに習ったのとは違う主題の展開を見ることになります。それは，本書で展開しているのが数学だからです。

本書のスタンス

「‥‥って何？」と問われると，困りませんか？学習は「‥‥って何？」からはじまると考えるのが道理ですが，実際には，「‥‥って何？」の問いは，いつもひとの意表をつきます。このことは，つぎのことを思わせます：「‥‥って何？」の問いで導かれるような学習は，(ひとの自然な生理とは反する) きわめて文化的な形態。

数学の学習の場合 ,「.... って何 ?」で導かれるようになっていないことは致命的です。「.... って何 ?」で問われているのは , 理解──「できる」に対する「わかる」の方──です。そして，「わからない」をやり過ごしたままで「できる」を続けていくことはできません。

学習だけのことなら自分だけの問題ですが , 教える側の問題となると , はなしは深刻です。自分でわかっていないものをひとに教えることはできません。実際 , わかっていないものをひとに教えるとは , どういうこと？
教える (わかっていて教える) と , 教えているつもり (わかっていないことに気づかず教える) の区別が必要です。「.... って何 ?」は , わかっているかどうかをチェックする問いです。この問いに答えられないものを教えているのは ,「教えているつもり」ということになります。
しかし ,「わかっていない」は , なかなか気づかれません。実際 ,「わかっていない」は ,「わかる」を示されてはじめて気づくことです。

本書は , 学校数学の「数と量」に関するいろいろな「何」を解説しようとするものです。

「何 ?」に対する答えは，結局「形」になります。すなわち「それらはこういう形のことだ」と答えることになります。そして , つづいて「なぜこんな形？」「こんな形のものには実際何がある？」に答えていくわけです。本書も，このように内容構成しています。

本書の構成と読み方

分量がありますので , 読書の負担をできるだけ軽減するよう努めました。具体的には，つぎの方法をとりました： 図解； 原則 2 ページ見開きで一つの主題を完結 ; 文字を使った一般的記述は避けて生の数字を使って例で示す ; 必要最低限の内容 , 等。（ただし , 内容的にどうしても難度が高くなってしまうところもあり ,「わかりやすさ」の貫徹にはまだまだ課題があると感じているところです。）

本書は原則「2 ページ見開きで一つの主題を完結」の体裁をとっていますが , 内容は系統的に進行しています。したがって , 本書の最初から読むことを , 先ず行ってください。これをしないでバラバラに読むのは , 無理ですし，また誤読のおそれがあります。

一見自分の守備範囲の外と思われる内容も , きちんと読んでください。ある一つのこと A を理解するとは , A に関わるいろいろなこと (A でないもの , A に類するもの , A の在る風景 , 等々) をあわせて理解することです。本書は , この意味での必要最小限の内容になっています。
例えば , 自然数 , 分数 ,「正負の数」, 実数 , 複素数それぞれの章があるのは , 主題を網羅しようとするためではありません。このうちの一つの理解するとは , 他をあわせて理解することだからです。

なお，「ページの余白の有効活用」の意味で，補足的，教養的・発展的な内容を込めたコーナーや，専門数学的な内容に踏み込む「Jump」のコーナーを設けています。このコーナーは，余裕に応じて読んでいただければけっこうです。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

1. 数が使われる構造

　ここでは , 数が使われるときの一般的な構造 (形) を解説します。いろいろな数があり , いろいろな量がありますが , それらが「数」と呼ばれ , また「量」と呼ばれる理由が , この構造 (形) です。

　数は , 量の比 (倍関係) の表現に使います。数はこの用途のための道具です。

　数の使用を分析すると ,「位」「量」「数」の 3 つの存在が現れてきます。

　量の比 (倍関係) に関しては , それの和と合成 (倍の倍) が考えられます。これがそれぞれ , 数の和 (加法) と積 (乗法) になります。そして量計算が , 数のこの二つの算法の計算で行えるようになります。

　数は，「数直線」あるいは「数平面」の形に視覚表現されます。

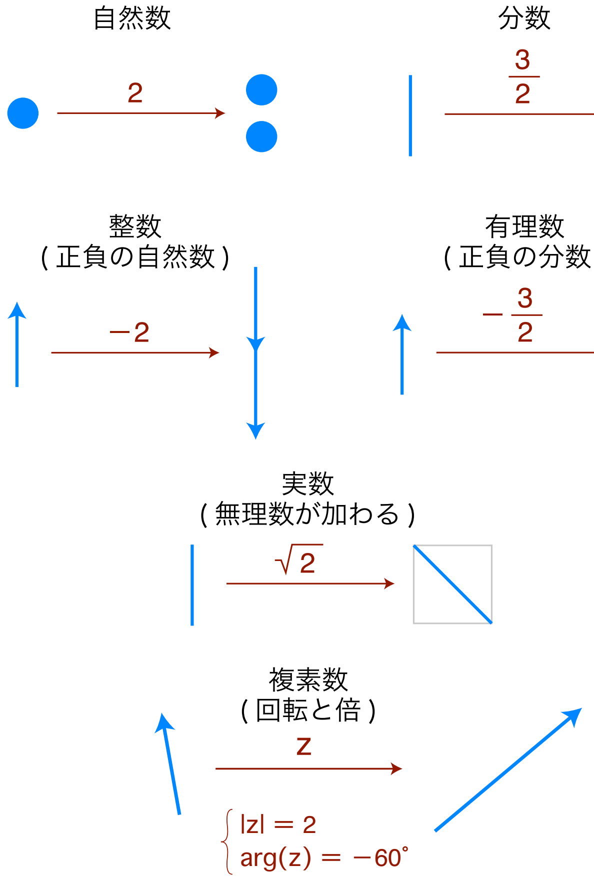
　量の形 (= 量のモデル) は，数によって構成されます。この意味では，量より先に数があります。

1.1 数は量の比

数は, 量の「比」の表現に使われます。この用途において, 数は「道具」です。

学校数学に現れる数には, 自然数, 分数, 「正負の数」, 整数, 有理数, 実数, 複素数があります。このようにいろいろな数があるのは, 扱う量の違いによって, それぞれに適した数がつくられた結果です。

自然数, 分数, 「正負の数」, 整数, 有理数, 実数, 複素数では, 「比」のイメージが, つぎのように異なってきます：



このようにずいぶん見かけの違う数がひとしく「数」という名で括られているのは, 同じ形 (構造) をもつからです。実際は, この形が「数」と呼ばれるべきものであり, この形をもつものに「‥‥数」の呼び名がつけられているわけです。

このことは, 量についても同様です。すなわち, 長さ, 重さ, 時間等がひとしく「量」という名で括られているのは, 同じ形 (構造) をもつからです。実際は, この形が「量」と呼ばれるべきものです。

この章では, 数・量の形について概説していきます。

「数は道具」「数は量の比」「扱う量に適した数がつくられる」「数･量は形」という言い方に違和感をもたれたかも知れません。しかしこれが,「数と量」を貫徹するテーマです。

違和感の原因の一つには ,「数 = 量」のイメージがあります。実際 , 現行の学校数学は , このイメージをむしろ強化するような具合になっています。そしてこのとき ,

は違和感がもたれ ,

はしっくりする , というようになります。

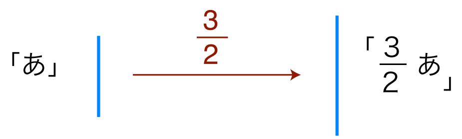
しかし , 後の図は , もとにしている量とそれに対する比の表現を省略したものだということに , 気づいてください。実際 , 数値はもとにする量に依存するわけですから。

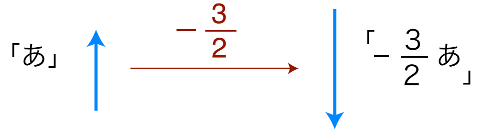
1.2 量の表現

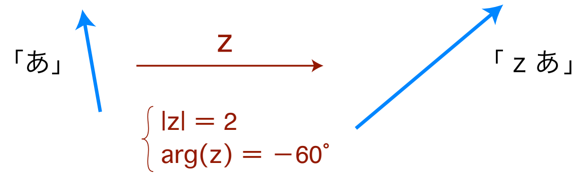
量は，相対的に表現されます。すなわち，「ある量と比べてどれだけ」で表します。そこで量の比を表現するものをつくればよいことになり，そしてつくったのが数というわけです。
「ある量と比べてどれだけ」は，数を使うことにより「ある量の何倍」の言い方になります。

比べるときの基にする量を固定して使うことにするとき，この量の身分を表すことばが「単位」です。そこで「単位の何倍」が量の言い表し方になります。（使われる数が自然数の場合,「単位・倍」は「個・いくつ」の言い回しにかわったりします。）

さらに単位に名前をつけるとき，例えば「あ」と命名するとき，「何あ」が量の表し方になります。これが,「3 m (メートル)」とか「1.5 kg (キログラム)」の表現のしくみです。





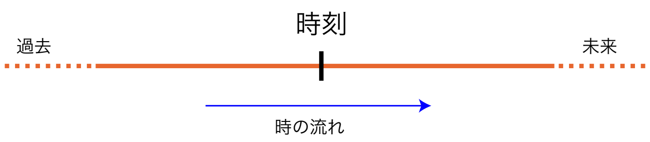


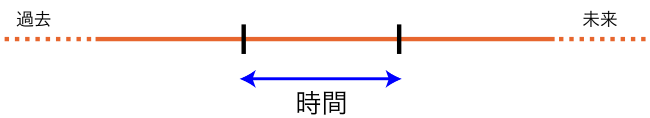
1.3 位の表現

正負の数，複素数は，量に加え，「位（位置）」を扱うものになります。すなわち数が，位の表現，位の計算に用いられるものになります。そこでは，位･量･数の（互いに関係し合う）３種類の存在の組が現れています。

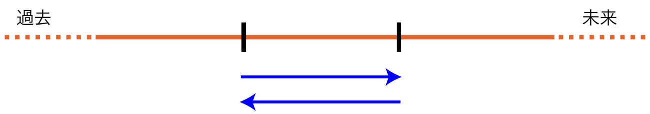
1.3.1 時刻・時間・数

例として，時刻の表現を考えることにしましょう。この場合，時刻・時間がつぎのようなイメージ（それぞれ位と量）でとらえられていることになります：

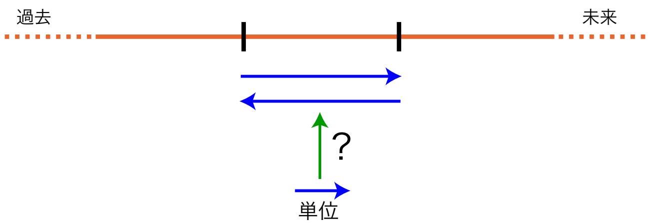




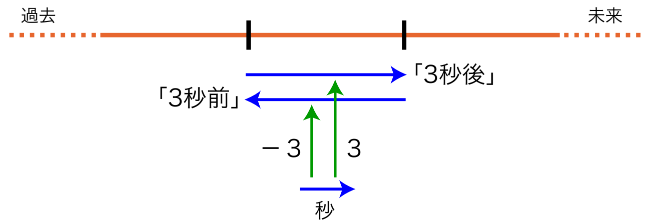
時間のイメージは時刻の「間」ですが，いまこれを方向付き（シフト / 移動）で見ることにします：



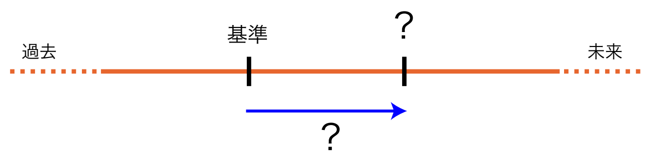
時間は，「単位（とする時間）の何倍」というふうに表します（定量）：



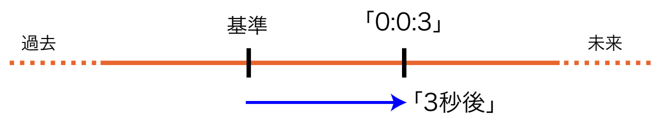
ここで，数が出てきます：



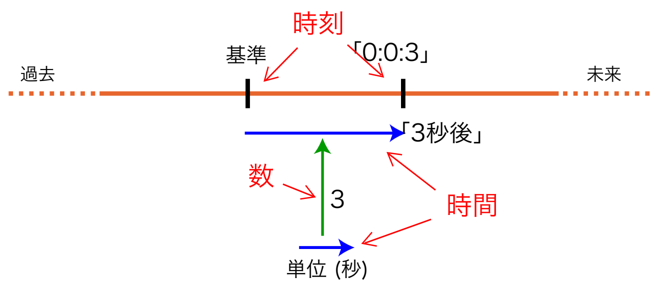
つぎに時刻は，「基準（とする時刻）からどれだけの時間」というふうに表します（定位）：



時間は既に表せるようになっていますから，これをもとに時刻を表します：

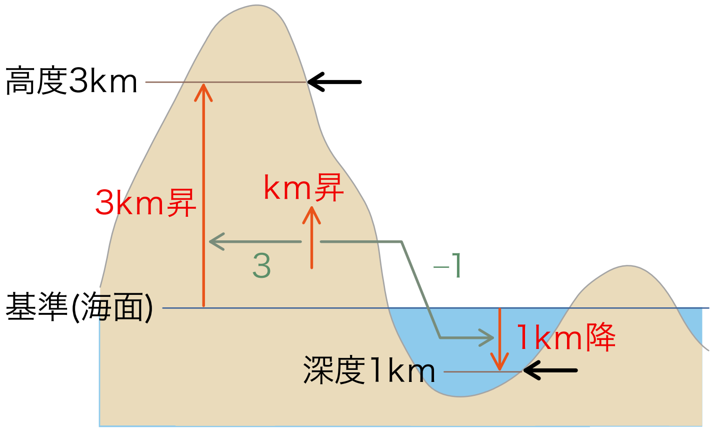


以下の話に進めるために，時刻（位），時間（量），数の関係を，つぎの図でしっかり押さえてください：



1.3.2 高さ・昇降・数

時刻の表現では，３つの異なる種類の存在（「位・量・数」）がつくる構造が現れてきました。さらに別の例として，高さの表現をみることにします。このときは，高さ・昇降・数が，「位・量・数」の組になります。



(1) 高さは，「基準からどれだけ」で表現される。
(2) 基準としては，平均海面がとられたりする。
(3)「基準からどれだけ」の「どれだけ」は，昇降の大きさ。
(4) 昇降の大きさは，「単位とする昇降の大きさの何倍」で表現される。
(5)「km 昇」を単位にとるとき，基準から km 昇の３倍の高さは「高度 3km」ということになる。
同様に，基準から km 昇の −１ 倍の高さは「高度 (−1) km」──ただし，km 降の １倍の深さということで「深度 1km」とするのが，日常的表現。

1.4 量・数，位・量・数

時刻，高さの表現での数使用に，わたしたちは同じ形（構造）を見ました。

先ず，この中に時間，昇降の表現がありましたが，その数使用は，「時間·数」「昇降・数」の例を「量・数」に一般化するものです。

そして時刻，高さの表現全体での数使用は，「時刻・時間・数」「高さ・昇降・数」の例を「位・量・数」に一般化するものです。

数は，量・数の構造の中で量の表現に使われます。また正負の数，複素数になると，さらに位・量・数の構造の中で位の表現に使われます。これが数の道具性です。

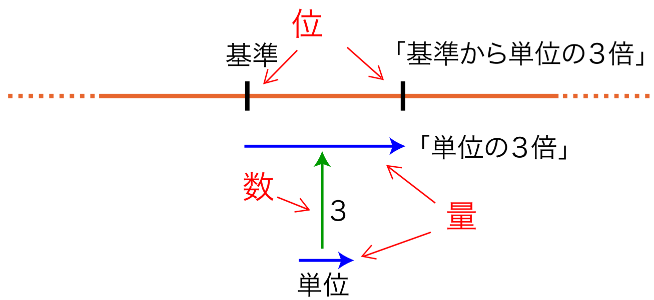
量の表現では，単位とする量に対する比（倍）が，数として対象化されています：

$$(1) \qquad \underset{(単位)}{量} \xrightarrow[(倍)]{数} 量$$

位の表現では，基準とする位からの移動 / シフトが，量として対象化されています：

$$(2) \qquad \underset{(基準)}{位} \xrightarrow[(シフト)]{量} 位$$

この量を (1) の形で表せば，位の表現の出来上がりです。



1.5 数の算法

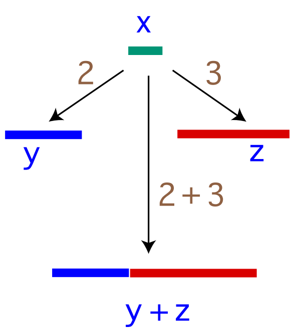
数には，和と積 (「+」と「×」の記号の文法) が考えられています。これは，これまでの話しとどう関わるのでしょう。

「+」は量の和の数値表現のために，「×」は量の倍の倍の数値表現のために，それぞれ導入されます。

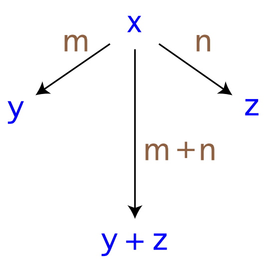
1.5.1 和・加法

簡単のためにある長さを一つイメージしてください。それを x としましょう。つぎに， x の 2 倍の長さ（y とします）と x の 3 倍の長さ（z とします）の和を考えます——この和を， y + z で表しましょう（この+は量の+です)。

そしてここで， x に対する y + z の比の表現を考えます。この比は， 2 と 3 で決まりますので，「2 + 3」(この+は数の+です）と書きます。



一般的に表すと，つぎのようになります：



このように数の「+」を定めると，自然数，分数，整数，実数，複素数のそれぞれで，つぎのような式変形が導かれることになります：

自然数： 5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1 = 8
（左辺の数を一つ後，右辺の数を一つ前の数に替える；
＋ 1 になったら，左辺の数を一つ後の数に替えて終了）
分数 ： 2/3 + 5/4 = (2×4 + 5×3)/(3×4)
整数 ： (− 5) + (+ 3) = − (5 − 3)
実数 ： 3 +√2 はこれ以上進みようがない。
複素数： (2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i

数が違ってくると見かけがずいぶん違ってきますが，これらは先ほどのルールから導かれてくるものです。——それぞれの数の中で「+」の文法を好き勝手に決めているのではありません。

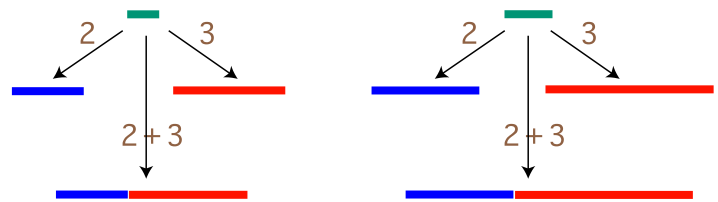
詳しくは，数の各論で示していきます。(§2.6.1 自然数の和，§3.2.1 分数の和，§4.3.1 正負の数の和，§5.1 実数の和，§6.3.1 複素数の和)

和が定義されると，加法がつぎの関数として定義されます：

$$(m,\ n) \longmapsto m + n$$

(「2 数にそれの和を対応させる」)

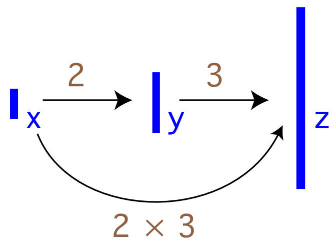
ここでの「+」の導入も，違和感をもたれるかも知れません。(違和感の原因は , このときも「数 = 量」のイメージです。) しかし，「+」の文法はまさにこの通りです。数の和は，比の和をそれ自体一つの比として定めるものです。つぎの図から，「2 + 3」が大きさを示さないことを，了解してください：



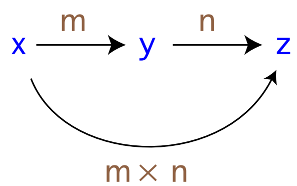
1.5.2 積・乗法

「和」のところでイメージしてもらった長さ x に対し，今度は，これを 2 倍し（y とします）さらにこれを 3 倍します（z とします）。

そしてここで，x に対する z の比の表現を考えます。この比は，2 と 3 で決まりますので，「2× 3」と書きます。



一般的に表すと，つぎのようになります：



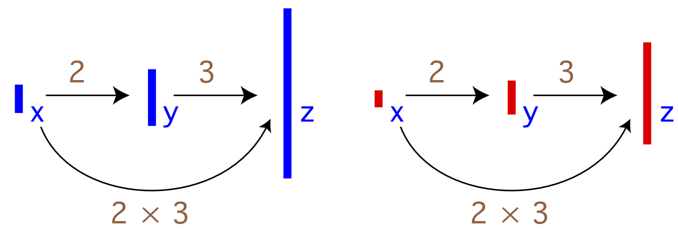
このように数の「×」を定めると，自然数，分数，整数，実数，複素数等それぞれの数の系で，独自の「積の式変形」が導かれることになります。——これは，数の各論で示していきます。(§2.6.4 自然数の積，§3.2.2 分数の積，§ 4.3.2 正負の数の積，§5.1 実数の積，§6.3.2 複素数の積)

積が定義されると，乗法がつぎの関数として定義されます：

$$(m,\ n) \longmapsto m \times n$$

(「2 数にそれの積を対応させる」)

「×」の文法はまさにこの通りです。数の積は，比の合成 (倍の倍) を一つの比 (倍) として定めるものです。つぎの図から，「2×3」が大きさを示さないことを，了解してください：



数の「×」の用法が倍の合成だということは，学校数学では明確に指導されません。自然数では「累加」(同じ数の繰り返しの和) のことと指導されます。分数では，自然数で指導された長方形の面積公式や速さの公式を分数に延長するというような (論理的には本末転倒した) やり方で，指導されます。「正負の数」の乗法は，倍の合成で指導すればなんでもない内容ですが (§4.3.2)，これをしないため，「負の数と負の数をかけると正の数」などは，ひどくフィクションめいた形で教え込まれます。複素数に至ると，「倍」さえも指導から消えてしまいます。

「和」に対する「加法」,「積」に対する「乗法」は, ここで述べたように,(2 つの数の組に一つの数を対応させる) 関数として定義されます。

和，積は，一つの数を指しています。「2 数を結合する力仕事」のようなイメージは，いけません。

学校数学に現れる「足し算」「掛け算」のことばは，実際のところ，多義的に使われています。和，積を求める計算法としての「筆算」を指すことが主ですが,「和」「積」や「加法」「乗法」の意味に近い使い方もされます。

1.5.3 差

2 数m , n の差「n - m」は,「mを足して n になる数」の言い換え (簡略表現) として定義されます。

例えば,「3－2」は「2 と足して 3 になる数」,「(3－2) – 5」は「5 と足して (2 と足して 3 になる数) になる数」です。

記号「–」には,「引く」とか「除く」とかの力仕事の意味はありません。「–」の意味は, ここで述べたものがすべてです。
「引く」とか「除く」とかの力仕事の表現や問題は,「–」の記号を使える構造を有します。「–」に「引く」とか「除く」の意味が感じられるとすれば, これが理由です。(道具とそれの用途の混同！)

1.5.4 商

2 数m , n の商「n ÷ m」は,「mを掛けて n になる数」の言い換え (簡略表現) として定義されます。

「表現が意味をもつ」と「表現されるものが存在する」は別のことです。
——ここで「意味をもつ」とは,「文法的に正しい言い回し」ということ。
例えば,「2 – 3」は, 意味 (「2 と足して 3 になる数」) を持ちますが, 自然数で考えるときは, これで表される数は存在しません。中学数学の「正負の数」で考えるときは, 存在します (– 1 です)。
「2÷0」は,「0 とかけて 2 になる数」の意味をもつ式です。そして, これで表される数は存在しません。
比較 :「体長 100m の魚」は, それが存在するかどうかと関係なく, 意味をもちます。

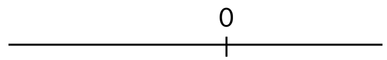
1.6 数直線

学校数学においては, 数の系の視覚表現として,「数直線」(複素数の場合は「数平面」) が主題になります。したがって, この視覚表現の方法を明らかにすることが,「数直線」の本来の指導内容になります。——ここでは, 数直線の方法を改めて示すことにします。(複素数の場合は §6.5 で。)

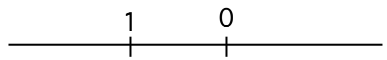
数直線は, つぎのようにつくります :

1. 直線を引く。

2. 任意に 1 点をプロットし,「0」と書く。



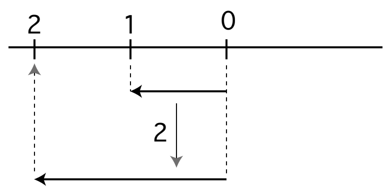
3. 任意にもう 1 点をプロットし,「1」と書く。



(「1 は 0 の右側」が既成概念になっているかも知れませんので, ここではわざと 1 を 0 の左側に配しました。)

数直線は, これでできあがりです。——これ以上はありません。特に, 数をこれ以上目盛るのは無駄です。(実際, ほかにどの数を目盛ればよりよくなるのでしょう？「2」？「-5/3」？ これといった数は, ありません。)

数直線の方法は,「すべての数を網羅する」(これは不可能 !) ではなく「リクエストに応じて示す」です。リクエストされた数は, その都度生成的に示されます。
例えば,「2」の表示の手順はつぎのようになります :



1.7 量の存在性

「数は観念的，量はリアル」のように感じる人は多いのではないでしょうか。しかし，量自体ががリアルというわけでないことは，「量」をさがしだすことを改めてやってみれば，すぐに気づきます。

試みに，身の周りに「速さ」を捜してみて下さい。リアルに存在しているのは，「走っている自動車」や「遅々として進まない仕事」といったものです。「速さ」は，これらに対して意識されてくるところのものです。

数学は，「ひとが量を意識するとは，物事にどのような形を見ることなのか？」という問題の立て方をします。そして，この形を記述しようとします。

中身の説明は Jump のコーナーにまわして結論だけを言いますと，「位・量・数」の形は，一つの数の系（N , +, ×) (自然数，分数，複素数等) に対する

(N , +, (N , +,),×, (N , +, ×))

のようになります。これが「位・量・数」のモデルです。

特に，N として自然数，分数，複素数等のどれを選ぶかで，「位・量・数」のとらえ方を調整します：

N	N に応じる位・量のイメージ
自然数	パラパラ (「離散」)
分数	びっしりつまっている (「稠密」)
実数	数学的にさらにびっしりつまっている (「完備」)
「正負の数」	位：直線上の点, 量：直線上の移動/シフト (正逆2方向)
複素数	位：平面上の点, 量：平面上の移動/シフト (360゜自由)

このように，数の効用 / 道具性は，

「数によって見える量が違ってくる」

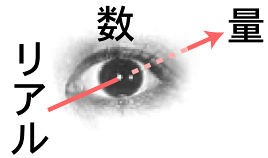
「数の選択によって，とらえる量を調整する」

にあります。先に，

「いろいろな数があるのは，いろいろな量に対してそれぞれを扱うのに都合のよい数を作成 / 開発してきた結果」

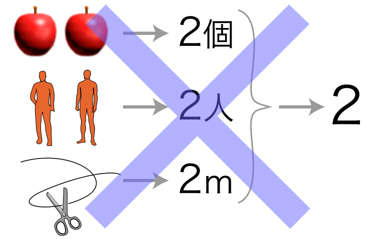
と述べましたが，量が数より先にあるというわけではありません。

「リアルに対して量という像を現す眼鏡」が，数のイメージになります：



「数は量の抽象」という考え方があります。イメージは右図のような感じです。

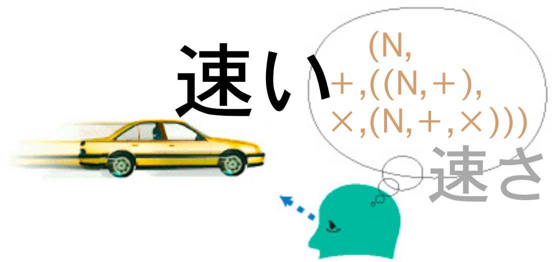
しかし，「数は量の抽象」は，(循環論法になりますし，さらにつぎの理由から) 適当ではありません：



(1) 数が量の抽象なら「量は数の具象」ということになります。しかし，量は具体物として存在するものではありません。量も抽象の産物です。

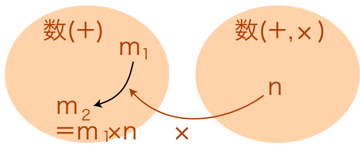
(2) そもそも，数の形 (構造) と量の形 (構造) は違います。「形 (構造)」の観点から言うと，「(位・) 量は数を使って組み立てられる」というのが事実です：

(N , +, ×) → (N , +, (N , +,),×, (N , +, ×))



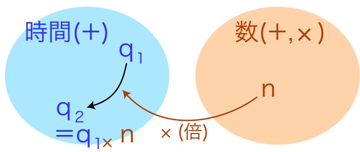
Jump

量のモデル ((N , +,),×, (N , +, ×)) について，説明します。これの集合的なイメージはつぎのようになります：



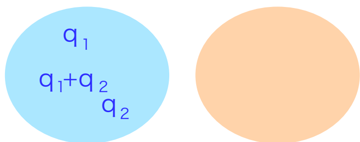
そして，これを眼鏡にして現れる像が (「時間・数」，「昇降・数」等の)「量・数」です (§1.4)。

「時間・数」は，つぎのようになっています：

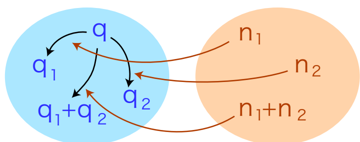


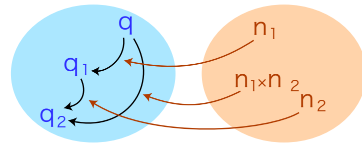
すなわち，数が，時間に対し「時間を倍する」という形で作用します。

時間の集合には加法があります：

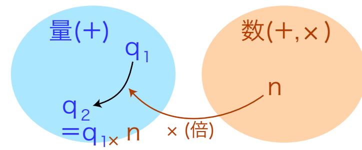


数の集合には，加法と乗法があります。そして，数の和には時間の和が対応し，数の積には時間の倍の合成が対応します：

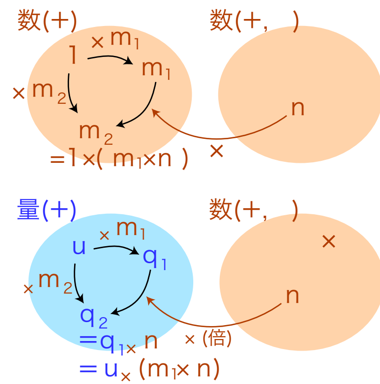




「時間・数」を例にとって形式化した以上の内容を，そのまま，「量・数」に一般化します：

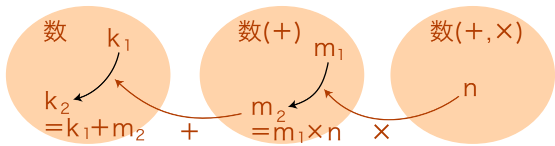


「眼鏡」と像の対応は，量の単位 u の導入をはさんで，つぎのようになります：

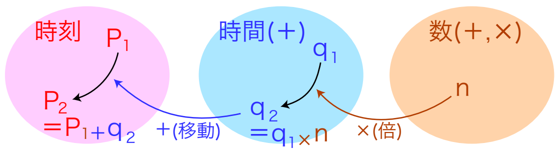


なお，ここでの「眼鏡」の比喩は，数学では「同型写像」を使ってきちんと述べられます。また，「量・数」に準じる (同じではありません！) 数学の主題は，線型代数学の中の「1 次元線型空間」ということになります。

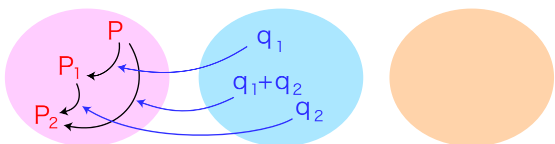
　つぎに，位のモデル (N , +, (N , +,),×, (N , +, ×)) について，説明します。
これの集合的なイメージはつぎのようになります：



そして，これを眼鏡にして現れる像が (「時刻・時間・数」，「高度・昇降・数」等の)「位・量・数」です (§1.4)。
　「時刻・時間・数」は，つぎのようになっています：

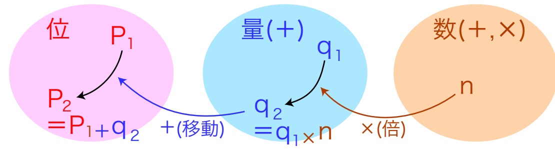


すなわち，時間は，時刻に対し「時刻を移動 (シフト) する」という形で作用します。
　量の和には，移動の合成が対応します：

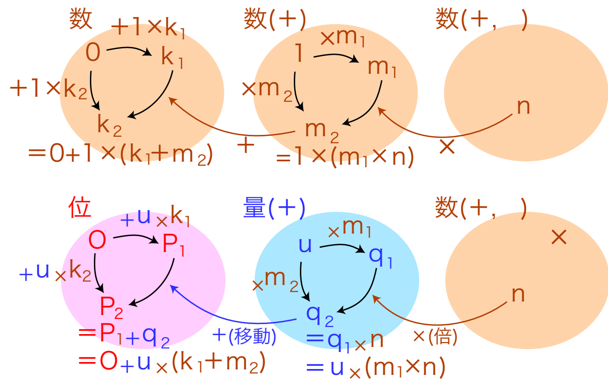


　量と数の間の関係は，先に述べた通りです。

　「時刻・時間・数」を例にとって形式化した以上の内容を，そのまま，「位・量・数」に一般化します：



　「眼鏡」と像の対応は，量の単位 u と位の基準 O の導入をはさんで，つぎのようになります：



　ここでの「眼鏡」の比喩は，数学では「同型写像」を使ってきちんと述べられます。また，「位・量・数」に準じる (同じではありません！) 数学の主題は，線型代数学の中の「1 次元アフィン空間とそれに伴う線型空間」ということになります。

2. 自然数

ここから続く５つの章では，５つの「数」——自然数，分数，「正負の数」，実数，複素数——を一つひとつ取り上げます。これらがそれぞれ「数」であるというのは，それぞれが「数」の要件を満たしているということです。

「数」の要件は, 前の章で述べました。——「数」の要件は, 形（構造）と意義（用途）で成っています。数の意義（用途）は，量の比の表現に使われ，そしてこのことを通じて量表現や量計算に使われることです。

「数」の最初にくるのは自然数です。すなわち，自然数の実現が各種数の系の実現の出発点になります。

自然数はそれに固有の形で「数」の要件を実現し，「個数」と呼ばれる独特の量を現します。

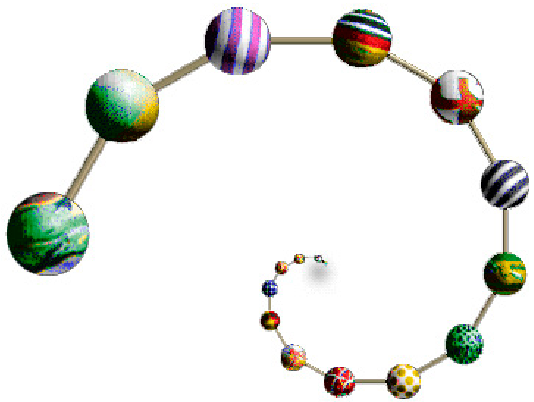
2.1 系列

「自然数」はそれ自体一つの形 (構造) です。それは「系列」と呼ばれる構造とその上の算法 (加法と乗法) で構成されています。

算法	自然数
系列	

自然数は，系列の構造のみでも重要な道具になります。実際，計数の道具として機能するのは系列の部分です。また，識別番号，順番という使われ方も，系列の道具性に属します。

系列は，つぎのような形を指すことばです：



すなわち，「はじめ」があり，これのつぎがあり，さらにつぎがあり，････この関係が際限なく続きます：

はじめ → はじめのつぎ → はじめのつぎのつぎ → ････

ここでは，イメージに訴えて系列の形を示していますが，この形を数学的にきちんと定義したものが「ペアノ (Peano) の公理」です。

Jump

ペアノの公理

系列 (自然数) は，集合 ℕ と，ℕ の一つの要素 1 と，関数 f: ℕ ──→ ℕ の組 (ℕ，1, f) であり，そしてこれについて，以下のことが成り立っている：

1° f(x) = 1 となる ℕ の要素 x は存在しない；

2° ℕ の要素 x, y について f(x) = f(y) ならば x = y；

3° ℕ の部分集合 ℕ ′ は，つぎの条件を満たせば，ℕ に一致：

1 が ℕ ′ の要素になっている；

x が ℕ ′ の要素のとき，f(x) も ℕ ′ の要素．

どうしてこれが「系列」の定義 (数学化) になっているのか，ちょっと見にはわかりません。以下，これが「系列」の巧みな定義になっていることを，見ていきます。

先ず，集合「ℕ 」は，系列：

○ → ○ → ○ → ････

の項全体の集合です。「1」は，これの先頭の項です。「f」は，各項にその直後の項 (「後者 (successor)」) を対応させる関数です。

f が関数であるという点──すなわち，対応一般 (一つの要素に複数の要素が対応することを許す) ではなく一意対応 (一つの要素に一つの要素が，しかもただ一つの要素が，対応する) であるという点──は，本質的です。実際，「系列」は，

○ → ○ → ････

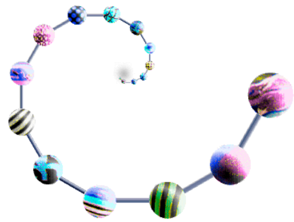
････ → ○ → ○

○ → ○ → ････

のように枝分かれするものではありませんが，この枝分かれを禁止するのが，「f は一意対応である」という条件です。(→続く)

2.2 系列の実現

「系列」を実現するには，工夫が要ります。



実際，異なるものをその都度デザインするというやり方では，息が続きません。それに，そもそも覚えることができませんから，系列（自然数）として使うこともできません。

また，単純な規則によるつくり方では，使い勝手のよいものになりません：

|, ||, |||, ||||, |||||, ‥‥

わたしたちの使っている系列（自然数）では, この問題をクリアするのに,「十進生成」のアイデアが使われています。

Jump

（前からの続き）　条件 1° は ,「1」を先頭として定義するものです。——「先頭」を「何の後でもない」ことと条件づけています。

しかしここで , 先頭が一つに限るのかどうかが , 心配になります。——他にも先頭があったとしましょう。このとき , 別々の先頭から出発する列は先でつながることはありません。というのも , 条件 2° によって

‥‥ → ○ → ○ ↘
　　　　　　　○ → ○ → ‥‥
‥‥ → ○ → ○ ↗

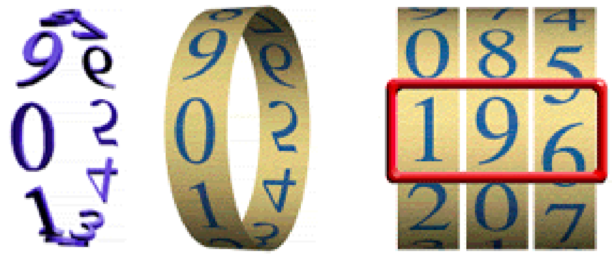
の形が禁止されているからです。したがって , 他にも先頭があるとすれば , ℕ は互いに交わらない複数の系列で成っていなければなりません。——しかし , 互いに交わらない複数の系列で成るという状態は , 条件 3° によって許されません。（→続く）

2.2.1 十進系列

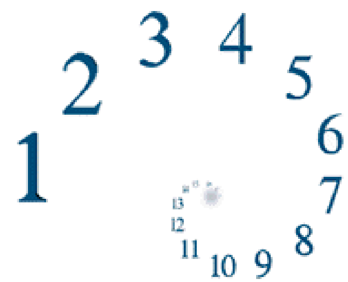
わたしたちの使っている系列（自然数）は，「十進生成」の方法でつくられています：

1. 10 個の絵から出発：

2. これからリングをつくり，窓を用意し，カウンタと同じ動作で動かす。



3. その都度窓に現れるパターンを書き取っていけば，系列が得られる。



このような系列の作り方を十進生成と言い，このようにして作られた系列を「十進系列」と呼びます。また，十進系列を母体とする自然数を，「十進数」と呼んでいます。

2.2.2 漢数字

「漢数字」は，位記号を併用する十進系列です。そしてこの位記号には 2 種類があります：

数字：一 , 二 , 三 , 四 , 五 , 六 , 七 , 八 , 九 , □ (空記号)
位記号（第一種）：□ (空記号)，十, 百, 千
位記号（第二種）：□ (空記号)，万, 億, 兆，・・・・

	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□
	兆				億				万				□			

数表示は，つぎの規則 (文法) に従います：

1. 空記号□は，表示しない。
2. 数字□をのせている第一種位記号は，表示しない。
3. 十, 百, 千の上の一は，表示しない。

例えば，２０４１７２１００４１は，つぎのように構成されて，「二百四億千七百二十一万　四十一」となります：

						2	0	4	1	7	2	1	0	0	4	1
						二	□	四	一	七	二	一	□	□	四	一
	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□
	兆				億				万				□			

なお，第二種の位記号は，つぎのようになっています：

10^4	万	10^{40}	正(せい)
10^8	億	10^{44}	載(さい)
10^{12}	兆	10^{48}	極(ごく)
10^{16}	京(けい)	10^{52}	恒河沙(ごうがしゃ)
10^{20}	垓(がい)	10^{56}	阿僧祇(あそうぎ)
10^{24}	秭(じょ)	10^{60}	那由他(なゆた)
10^{28}	穣(じょう)	10^{64}	不可思議(ふかしぎ)
10^{32}	溝(こう)	10^{68}	無量大数(むりょうたいすう)
10^{36}	澗(かん)		

英語の数表現も，漢数字と同様，2 種類の位記号を使うものになっています。ただし，位はつぎのようにずれています：

	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□	hun-dred	ten	□
	trillion			billion			million			thousand			□		

	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□	千	百	十	□
	兆				億				万				□			

金銭の表記では「, 」を使って位表現していますが，これは英語の数表現にあわせていることになります。

Jump

（前からの続き）――しかし , 互いに交わらない複数の系列で成るという状態は , 条件 3° (註 1) によって許されません。実際 ,

$$\left.\begin{array}{ll} ① \to \bigcirc \to \cdots & :\mathbb{N}' \\ \bigcirc \to \bigcirc \to \cdots & \end{array}\right\} \mathbb{N}$$

のように ℕ ' をとると , ℕ ' は 3° の中の ℕ ' の条件を満たしていますから ℕ ' = ℕ でなければなりません。結局 , ℕ は一本の系列でなければならないことになります。

また , 条件 1° と 2° は，系列がどこかで終わる状態

$$\cdots \to \bigcirc \to \bigcirc \to \overset{x}{\bigcirc}$$

を禁止することにも効いています。――実際 , 条件 1° より , f(x) は 1 にはなれません。また , 条件 2° より , 1 以外の項 z = f(y) (y ≠ x) にもなれません : 条件 2° より z = f(x) = f(y) からは x = y となり，x ≠ y に反します。

$$\cdots \to \overset{y}{\bigcirc} \to \overset{z}{\bigcirc} \to \cdots \to \overset{x}{\bigcirc}$$

（「ペアノの公理」終わり）

2.2.3 n 進系列

わたしたちが使っている「十進数」は，十個の記号 (絵)「0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9」から生成されているわけですが，この「十」には数学的に特別な意味はありません。なぜ実際的に「十」かというと, 人が十本の指をもち, これを使って個数が数えられ，そしてこのとき計数が自ずと十進になるからです。

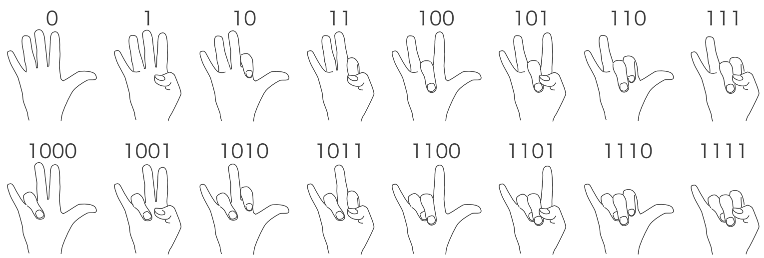
一般に， n 個の記号 (絵) から出発すれば n 進の系列が得られます。

コンピュータを使う仕事では， 2 進数や 16 進数の知識が必要になるときがあります。

「0，1」をもとにする 2 進数は，つぎのように生成されます（§2.2.1 で示した十進系列の生成方法を思い出してください）:

0　1　10　11　100　101　110　111　1000　‥‥

2 進数の生成には，つぎの指使いを対応させることができます：



これを続けて指が「グー」になったら，片手を追加して，同様に続けてみましょう。「0, 1, 2, 3 ,4, 5, ‥‥」と唱えながら数えると，2 進数と十進数のつぎの対応がわかります：

10 (2), 100 (4), 1000 (8), 10000 (16), 100000 (32), 1000000 (64), 10000000 (128), 100000000 (256), 1000000000 (512)

両手が「グー」になったとき，ひとの手を借りて 1 つ進むと：

10000000000 (1024)

16 進数は，16 個の記号 (絵) をもとにするわけですが，つぎのものを使います：

0　1　2　3　4　5　6　7　8　9　A　B　C　D　E　F

(すなわち，十進数で使った 0 から 9 の十個ににA，B，C，D，E，F の 6 個を追加します。) このとき，16 進数の生成はつぎのようになります：

0　1　2　3　4　5　6　7　8　9　A　B　C　D　E　F
10　11　12　13　14　15　16　17　18　19　1A　1B　1C　1D　1E　1F
20　21　22　23　24　25　26　27　28　29　2A　2B　2C　2D　2E　2F
‥‥‥‥‥‥‥‥
90　91　92　93　94　95　96　97　98　99　9A　9B　9C　9D　9E　9F
A0　A1　A2　A3　A4　A5　A6　A7　A8　A9　AA　AB　AC　AD　AE　AF
‥‥‥‥‥‥‥‥
F0　F1　F2　F3　F4　F5　F6　F7　F8　F9　FA　FB　FC　FD　FE　FF
100　101　102　103　104　105　106　107　108　109　10A　10B　10C　10D　10E　10F
110　111　‥‥

ここで，同じ数を 2 進，10 進，16 進のそれぞれで表記したときの，文字列の長さの関係を考えてみましょう。――つぎの相等関係から，2 進数表記は 10 進数表記の約 3 倍，16 進表記の約 4 倍の長さということがわかります：

$$2^{10} = 1024 \fallingdotseq 10^3,\quad 2^4 = 16^1$$

なお，情報化時代の基礎知識として，$2^{10} = 1024$，$2^8 = 16^2 = 256$　の関係は覚えておきましょう。

例えば，コンピュータでは，光の 3 原色赤緑青 (RGB) それぞれの強度を 0 から FF までの 256 段階に分けて，これの配分で色を表しています。これにより，$256^3 = 16777216$ 色表せることになります。特に：

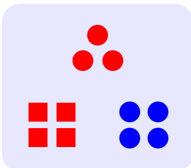
	赤	緑	青	黄	空	桃	白	黒
R	FF	00	00	FF	00	FF	FF	00
G	00	FF	00	FF	FF	00	FF	00
B	00	00	FF	00	FF	FF	FF	00

2.3 計数

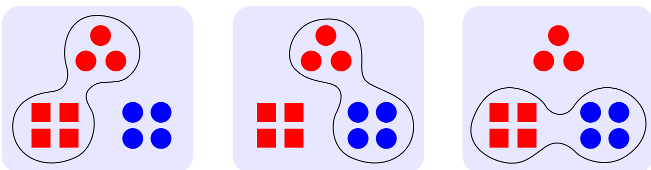
系列は，算法が組み込まれる以前の自然数の形です。しかし，これだけでも，すでに重要な道具になっています。すなわち，自然数が個数の数え上げ (計数) に使われるとき，そこでは系列としての自然数が使われています。——系列は，「個数」を表す<道具>です。

2.3.1 個数

「個数」は，人のひじょうに原初的な意識形態の一つです。——このことを見るために，つぎの３つの対象に対する同類 (仲間) 抽出を考えてみましょう。

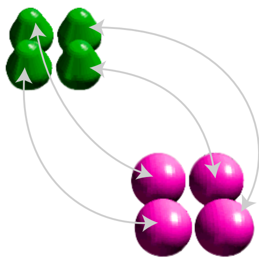


つぎのどの同類抽出にも理屈が立ちます：



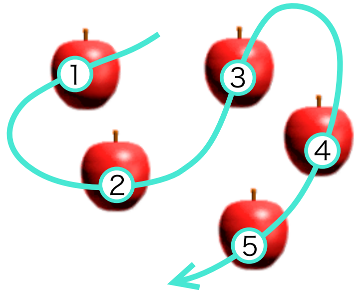
実際，左から，「同じ色」，「同じ形」，そして「同じ個数」の同類抽出です。

「同じ個数」の同類性は，数学の集合論で，「１対１対応」の概念を使って操作的に定義されます。



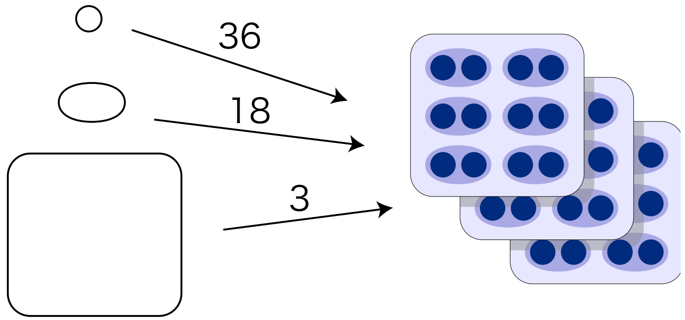
2.3.2 計数

系列は，つぎのような具合に，計数の「ものさし」として使われます：



すなわち，系列を「落ちなく重なりなく」対象に添わせたときのその最後の要素をもって，個数の表現とします。

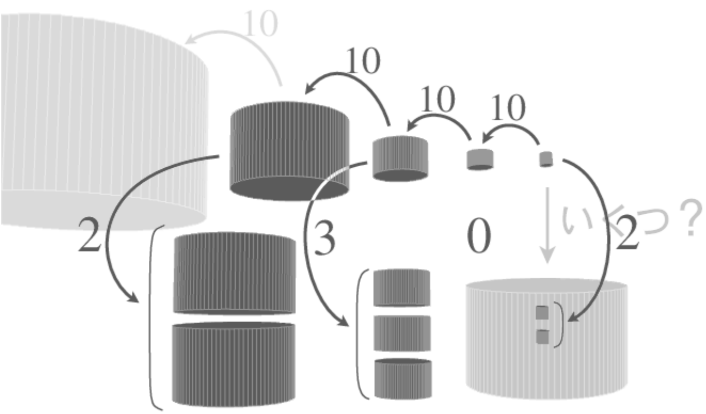
個数を考えるときの<個>は，あくまでも人の解釈であるということに注意しましょう。何を<個>と見なすかに絶対はありません——基本的に，状況依存です。



2.3.3 計数法

系列として十進数を用いるときには，計数の省力化が可能になります――すなわち，計数法が立ちます。

個数を求める問題に対し，先ず，＜個＞の十進のシステムをつくります。そして，このシステムの大きい要素の方から順に，下図のように，「個数を求めたい大きさに何個入るか」を数えていきます：



(余りが出たら，システムの下位の要素に移ってそれで数える)

そしてこの場合には，「2302」が個数になります。一つ一つ数えると 2302 回数えなければならないところを，わずかの操作で済んでいます。

この省力化は，系列に十進数を使っているおかげです。カウンタは実は十進数の生成機械だったわけですが（§2.2.1)，上の計数法は，カウンタの上では，「一の位のメモリを一つ一つ進めるかわりに，大きい位のメモリを直接進める」数え方になっています。

2.4 数の大小

数（系列の要素）に対しては，

はじめ → はじめのつぎ → はじめのつぎのつぎ → · · · ·

の順序にもとづいて，「前後」の順序関係を立てることができます。例えば：

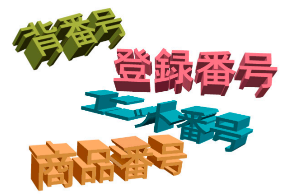
2 ＜ 5　(「2 は 5 の前 (5 は 2 の後)」)

一方，個数比較では，個数の「大小」が値の数の「前後」と直結します。この理由で，数の「前後」に対する「大小」の読み替えが生じました：

2 ＜ 5　(「2 は 5 より小 (5 は 2 より大)」)

2.5 識別番号・順番

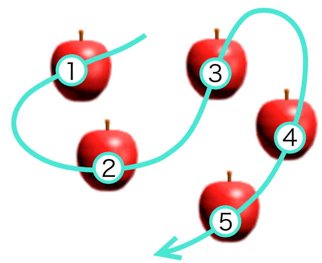
系列の用途には，個数の表現の他に，個の識別があります。すなわち，識別の番号として使うというものです。――系列は異なる要素を限りなくもっていますが，このことを利用します。



識別番号の特別なものに「順番」があります。

すなわち，識別番号は系列の一部と一対一の対応をつくるわけですが，その系列の部分として系列の切片（とびとびではなく，きっちり 1 → 2 → 3 → · · · · → n）を選ぶとき，「識別番号」は特に「順番」と呼ばれます。

順番がつけられる形は，計数の形と同じです。

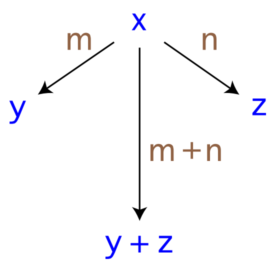


2.6 算法

和と積は数の要件ですが，(「個数」が量である) 自然数においてこれがどのように定まるかを，見ていきます。

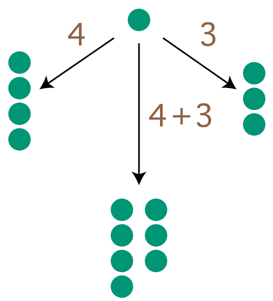
2.6.1 和・加法

一般に，数の和は倍の和として導入されます。――すなわち，つぎの形式が，和の記号「+」の用法を定めるものになります：



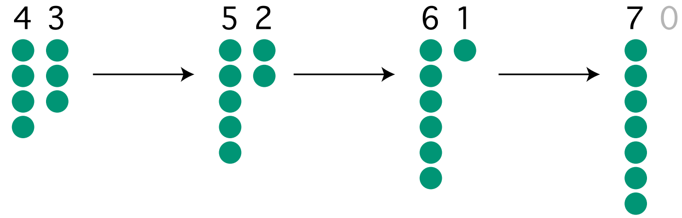
x, y, z ：量
m, n ：数

そこで，自然数の場合は，つぎのようになります：



さて，上の形が成り立つようにするには，自然数の和をどのように定めたらよいでしょう？――答えはつぎのようになります。

4 個と 3 個から始めて，一方から他方への一個ずつの移動を，尽きるまで続ける：



尽きたときのもう一方の側の個数を，4 + 3 に対応させる。
そこで，上の操作の各ステップでの個数の変化を書き留めると，これがそのまま求和の手順（アルゴリズム）になっている：

つぎ	4	3	まえ
つぎ	5	2	まえ
つぎ	6	1	
	7		

実際，ここで示した手順は，自然数論の出発になる「ペアノ (Peano) の公理」の中にある求和アルゴリズム (→ Jump) に他なりません。

> 練習：「1, 2, 3, ‥‥」を使うとかえってピンとこないかも知れませんので，「A, B, C, D, ‥‥」がわたしたちの知っている系列だとして，H + D を求めてみましょう：
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | つぎ | H | D | まえ |
> | つぎ | I | C | まえ |
> | つぎ | J | B | まえ |
> | つぎ | K | A | |
> | | L | | |
>
> したがって，H + D = L です。

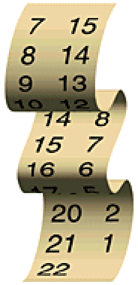
和が定まることにより，自然数の加法も定まります。――つぎの関数です：

$$(m,\ n) \longmapsto m + n$$

(「2 数にそれの和を対応させる」)

2.6.2 十進数求和法

7+15 を加法の手順（アルゴリズム）に従って求めるとなると，16 行を費やしてしまいます。しかし実際には，わたしたちはこの結果を３行ないし４行を費やすだけで得てしまいます。これは，十進数を使っているおかげです。



$$\begin{array}{r} {}^{1}\ 7 \\ +\ 15 \\ \hline 22 \end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

十進数では足し算の「九九表」を覚えてしまうことで，どんな２数の和も求められるようになります。

小学算数では，この十進数の求和法に対し「足し算」ないし「足し算の筆算」の言い回しが使われています。

2.6.3 差

２数m，nの差「n - m」は,「mを足してnになる数」の言い換え（簡略表現）として定義されました (§1.3.2)。

十進数に対しては，求差法が，求和操作の逆操作として立ちます：

$$\begin{array}{r} 125 \\ -\ 87 \\ \hline 38 \end{array}$$

線の下に第２行の数に加えて第１行の数になる数を書いていく。──これを下の位から順次一致させていく。

わたしたちが意識している計算法（「位下げと引き算」）と違うようですが，実際にやってみるとわかるように，同じことです。

小学算数では，この求差法に対し「引き算」ないし「引き算の筆算」の言い回しが使われています。

Jump

自然数論での「+」の定義

自然数論では, ペアノの公理で定義される系列 (自然数) (ℕ, 1, f) に対し,「+」をつぎのように定義します：

1°　$x + 1 = f(x)$
2°　$x + (y + 1) = (x + y) + 1$

一方，§2.6.1 で示した「つぎ・まえ」の求和アルゴリズム（個数の和を求める物操作をそのまま写したもの）は，つぎのようになっています：

1°　$x + 1 = f(x)$
2°　$x + (y + 1) = (x + 1) + y$

実際，この２つの定義は同値です。──最初の定義から，$x + (y + 1) = (x + 1) + y$ を導いてみましょう。数学的帰納法（「系列」の定義の 3°）を使います。

先ず，2°より，$y = 1$ で成り立ちます：$x + (1 + 1) = (x + 1) + 1$
つぎに，$x + (y + 1) = (x + 1) + y$ が成り立つとの仮定の下で，

$x + (f(y) + 1)$
$= x + ((y + 1) + 1) = (x + (y + 1)) + 1$　(1°そして 2°)
$= ((x + 1) + y) + 1 = (x + 1) + (y + 1)$　(仮定そして 2°)
$= (x + 1) + f(y)$

すなわち，$f(y)$ で成り立ちます。

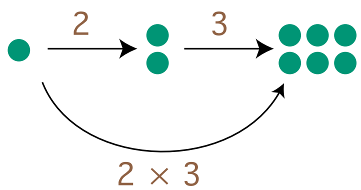
2.6.4 積・乗法

一般に，数の積は倍の合成として導入されます。——すなわち，つぎの形式が，積の記号「×」の用法を定めるものになります：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m\times n"'] & y \arrow[r, "n"] & z \end{tikzcd}$$

x, y, z ：量
m, n ：数

そこで，自然数の場合は，つぎのようになります：



さて，この形式が成り立つようにするには，自然数の積をどのように定めたらよいでしょう？——累加の形で定義すればよいことになります：

$$2\times 3 = \overbrace{(2+2)+2}^{3}$$

こうして積が定まると，自然数の乗法も定まります。——つぎの関数です：

$$(m,\ n) \longmapsto m\times n$$

(「2数にそれの積を対応させる」)

2.6.5 十進数求積法

十進数では，「かけ算九九表」を使うことで，どんな二数の積も求められるようになります（ただし計算の最終ステップで，「足し算九九表」を使います)。

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ \ 56 \\ \hline 204 \\ 170 \\ \hline 1904 \end{array}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

小学算数では，この十進数の求積法に対し「かけ算」ないし「かけ算の筆算」の言い回しが使われています。

Jump

自然数論での「×」の定義

自然数論では，系列 (自然数) (ℕ, 1, f) における「×」をつぎのように定義します：

1° $x\times 1 = x$
2° $x\times(y + 1) = x\times y + x$

これは「×」を累加として定義するものになっています：

$$4\times 3 = 4\times(2 + 1) = (4\times 2) + 4$$
$$=(4\times(1 + 1)) + 4 = ((4\times 1) + 4) + 4$$
$$=(4 + 4) + 4$$

2.6.6 商

商「n ÷ m」は,「mと掛けてｎになる数」の言い換え (簡略表現) として定義されました (§1.3.4)。

十進数に対しては, 求商法が, 求積操作の逆操作として立ちます：

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ \ 56 \\ \hline 204 \\ 170 \\ \hline 1904 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 56 \\ 34\,\overline{)\,1904} \\ 170 \\ \hline 204 \end{array}$$

小学算数では, この求商法に対し「割り算」ないし「割り算の筆算」の言い回しが使われています。

2.6.7「等分除・包含除」

従来の数学教育の用語に,「等分除･包含除」というのがあります。これには, つぎの二つを混同している向きがあります：

・「÷」の式が現れる問題や表現のタイプ

・「÷」そのものの意味

そこで,「等分除・包含除」を（生徒に対して使われる用語ではありませんが）ここで改めて取り上げることにします。

「÷」の式は道具として, 等分の問題や表現の中にも, 包含の問題や表現の中にも現れることができます。しかしだからといって,「このわり算は等分除, このわり算は包含除」というようにはなりません。

「等分除」,「包含除」と呼ばれるタイプの問題は, つぎのようになります：

等分：「12 個を３つのクラスに分けると, 一つのグループには何個？」

包含：「12 個では, ３個一組のクラスがいくつできる？」

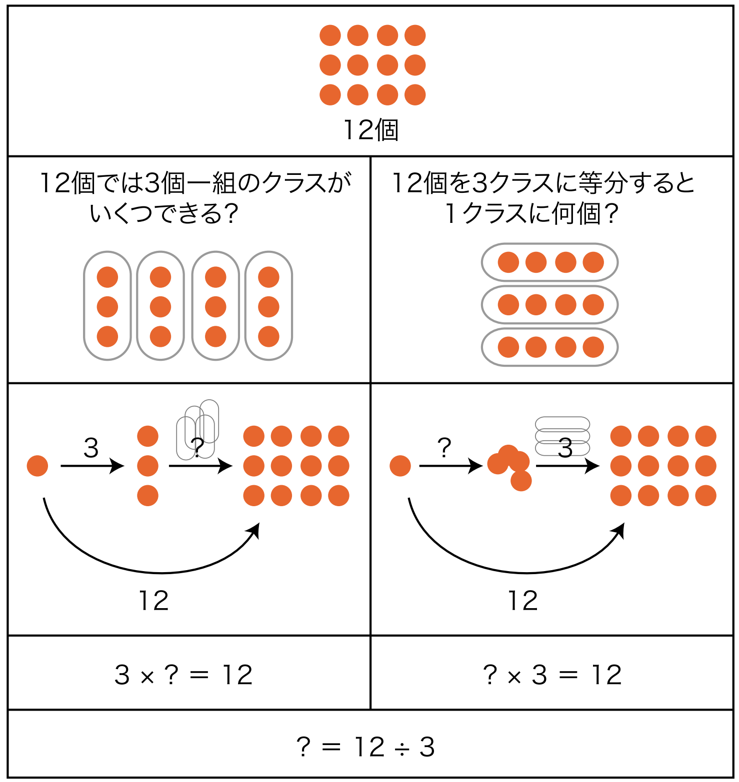
これらは, 例えばつぎのように変形されます：

等分：12 人が３つの長椅子に同じ人数だけ座ると, 一つの長椅子には何人？

包含：12 人に対し, ３人がけの椅子をいくつ用意すると全員すわれる？

等分と包含の問題は, 確かにタイプの違う問題のように見えます, では, 何がどう違うのでしょう？また, タイプが異なるのに,「12÷3」の式がひとしく立てられるのは, なぜでしょう？

つぎの表が, これの説明です。異なっているのは, 二つの倍の合成で, 不明な倍が前の方なのか後の方なのかだけです。この単純な違いが, 問題の印象をガラっと変えるものになっています。



2.7　０を含む自然数

系列の十進生成に使う「０」は，十進の計数法 (§2.3.3) では，「零 (無)」の解釈で処理されていることになります。──実際，例えば，「2034 個」が，「1000 個が２個，100 個が零個，10 個が３個，そして４個」のように読まれます。そしてそこでは，任意の数ｎと０の和「ｎ＋０＝ｎ」が暗黙に導入されています。

ここから，自然数に「零」を明示的に要素として付加する (「自然数に加法の零元を付加する」) という考えが出てきます。

2.7.1　０ではじまる系列

０を含む十進数の系では，「０」を「1」(系列の「はじめ」) の前に置くと，「1」を先頭とする系列よりも整合的な並べ方ができます：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
			54	55	56	57	58	59	60
			64	65	66	67	68	69	70
			74	75	76	77	78	79	80
			84	85	86	87	88	89	90
			94	95	96	97	98	99	100
			104	105	106	107	108	109	110
			114	115	116	117	118	119	120

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119

....

注意：あくまでも「置く」ということであって，これまで１に与えていた意味を０にシフトするということではありません。(もしそうなら，計数や求和アルゴリズムが壊れてしまいます。)

2.7.2　０との和・積

０を含む自然数の系では，

$$n + 0 = 0 + n = n$$

$$n \times 0 = 0 \times n = 0$$

と定めて，論理的整合性を得ることができます。

2.7.3　０を含む商の式

(1)「１÷０」

数学の授業の現場では，「０でわる除法を考えない」という指導をしているところがあるかも知れません。すなわち，生徒に「÷０」をタブーと理解させる指導です。この指導は，教育的方便で行うのでないとしたら，誤りです。

「１÷０」は無意味ではありません。「０とかけて１になる数」という意味があります。(一般に「m÷n」は,「nとかけてmになる数」の言い換えでした。) 正しい指導は，つぎのように言うことです：*「1÷0」と表される数は存在しない (「存在が不能」)*。

「意味がある / ない」と「存在する / しない」は，別のことです。これを区別しましょう。

(2)「０÷０」

「０÷０」は「０とかけて０になる数」。ところで，すべての数が「０とかけて０になる数」です。すなわち，「存在が不定」。

(3)「0÷1」

「0÷1」は「1 とかけて０になる数」。これは０です。

3. 分数

分数は , 量の比を本格的に扱う道具として登場します。

「分数」は, ひとの思考形式の基礎を構成しているものの一つです。日常生活に分数の現れることが少ないように見えても , 日常生活の中に厳然と潜在しています。「分数」を能力的に欠くとどうなるかを具体的に言うことはできませんが , これの欠落がひとの生活能力に影響してこないはずはないということは , 感じられます。この意味で , 学校での分数指導は ,「分数」の生活能力的意義を確信して行われてよいでしょう。

また , 分数の学習は , 数学の学習として最も基本的なものの一つです。実際 ,「数」を知ることの要素に「分数を知る」があります。

3.1 分数倍

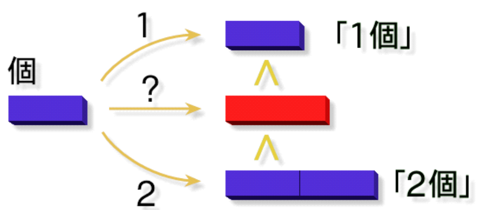
「分数」のもとは，２量の比 (倍関係) の表現です。これは， ２量に対し，第３の量で「いくつといくつ」と数えるものです。特に，自然数の対がこれの形になります。

２量のうちの一方に「もとにする量」「単位」の意味を持たせるとき，この比の表現は，他方の量の数値の意味をもつようになります。

２量からそれの分数倍を求める手順（アルゴリズム）が，「ユークリッドの互除法」という名で存在します。特に，「分数値」は実際的な概念です。

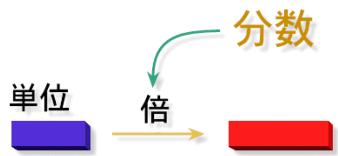
3.1.1 分数の道具性

自然数を使った「何個」と言い方ができない場合，あるいはそういう言い方をしたくない場合があります。

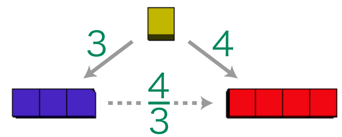


このとき，「一個と少し」のような言い方をすることもあります。しかし，「一個と少し」のような表現からは，もとの大きさを再現できません。

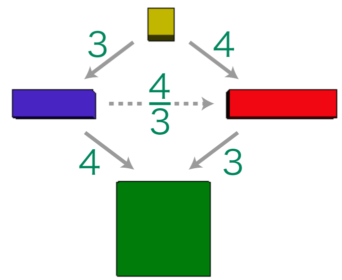
分数は，ここでの「もとの大きさをきちんと再現できる表現」という課題に対する解答の一つとして，導入されます。あわせて，「何個」表現がくずれるこのような状況に対しては,「個」の替わりに「単位」,「いくつ」の替わりに「倍」のことばをそれぞれ使うようになります。



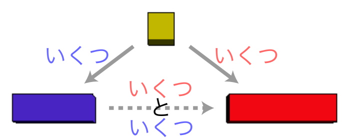
さて，分数のアイデアは，倍をつぎのように表現するというものです。——二つの大きさに対して，これらを「３つと４つ」に共約する第三の大きさがとれるとき，二つの大きさの間の倍を「３分の４」と表現します：



「３分の４」は，「それぞれを３倍， ４倍した大きさが同じ」というように定義することもできます。——まとめると，つぎのようになります：



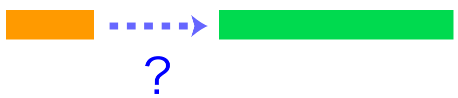
要点を確認しておきましょう。——分数の導入のきっかけは，「いくつ」と表現できない場面との出会いです。そして分数のアイデアは，一つの「いくつ」で表現できなかったところを，二つの「いくつ」で表現することです。（なんと簡明な解決！）



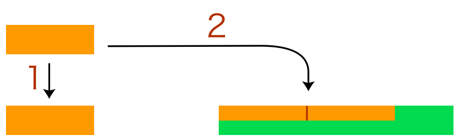
3.1.2 ユークリッドの互除法

分数倍の値は，試行錯誤的に物を操作して求めるしかないように，一見思われます。しかしそうではありません。分数の値を求める手順があります。言い換えると，分数を値とするきちんとした測定法があります。——以下がそれです：

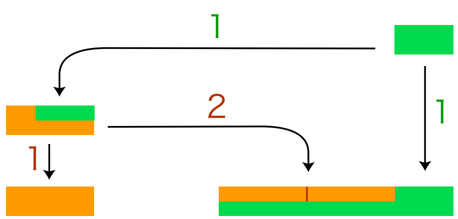
(1) 分数で何倍か？



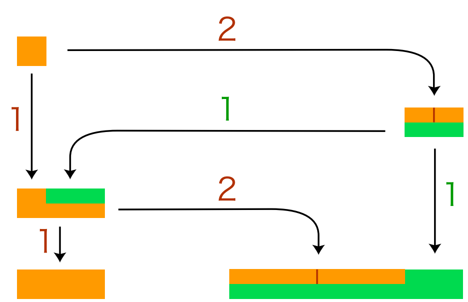
(2) 左が右にいくつ入るか？——２つ入って余りがでる。



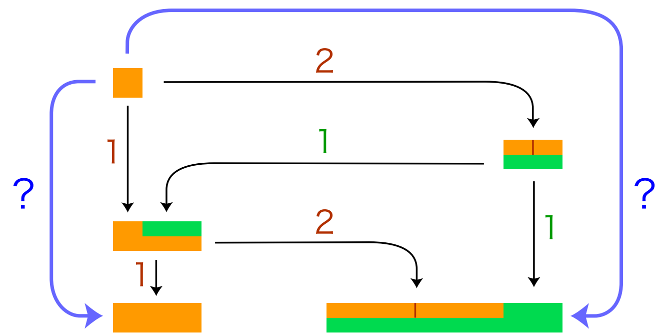
(3) 余りがもとの左にいくつ入るか——１つ入って余りがでる。



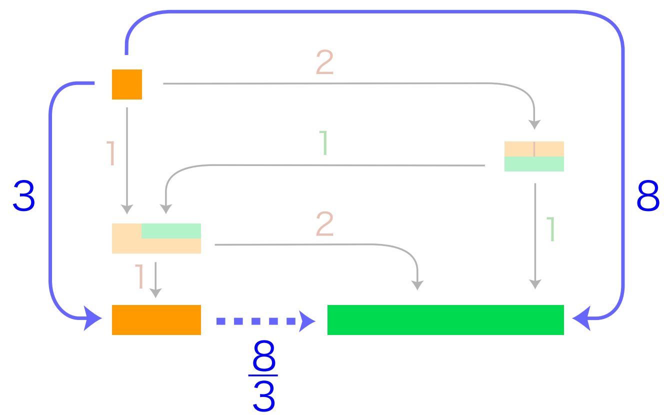
(4) 余りがもとの余りにいくつ入るか——２つ入って余りなし。



(5) 最後の余りが最初の２量にいくつ入るかが，計算で求められる：３と８。



(6) 最初の２つの量を，３つと８つに共約する量がとれたから，求める分数倍は 8/3。



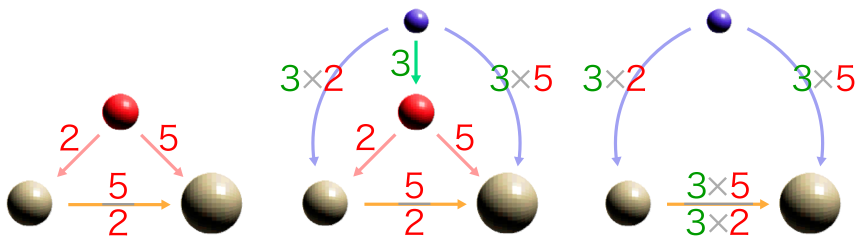
この手順（余り同士の互除を，余りがなくなるまで続ける）は，ユークリッドの互除法と呼ばれています。ユークリッドの互除法を使うと，つぎの両方が同時に得られます：

- 二量の共約量（しかも最大共約量）
- 分数の値（しかも既約分数）

3.1.3 同値な分数表現

同じ倍関係を表す分数表現は，限りなくあります。実際，一つの分数表現からは，つぎのやり方で，同値な分数表現が限りなく導けます (図中の量は体積をイメージしています)：

(1) 5/2 倍の構造。
(2) 例えば，３倍すると赤の大きさになるものをとる。
(3) もとの二量の関係をこの青の大きさでみると，(3× 5)/(3× 2) と表現されることになる。

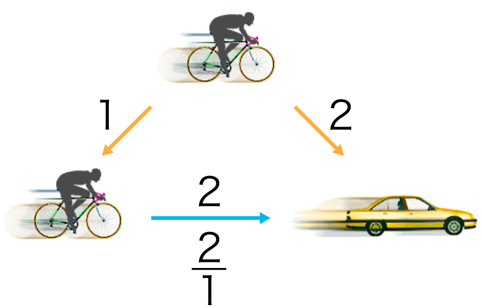


(1)　(2)　(3)

実際，一般に n/m と (n×k)/(m×k) は同値な表現。

3.1.4 自然数倍の拡張

自然数倍は，つぎの見方により，分数倍に拡張されます――n 倍と (n/1) 倍が同値 (図中の量は速さをイメージ)：



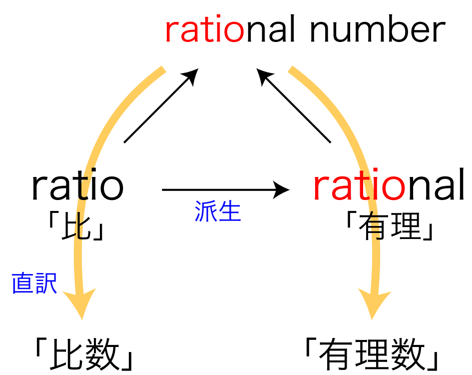
3.1.5「比数」

「分数」の数学的な別の言い回しは「有理数」です。さてなんで「有理」なんでしょう？

「有理数」は，英語では "rational number" となります。 "rational" の意味に「合理的」がありますが，「有理数」はこの意味を受けているわけです。

しかし，"rational" の "ratio" のもともとの意味は「比」であり，"rational number" は「比数」と訳したほうが適切でした。「比数」ということばからは，その本質に「いくつといくつ」のあることが読みとれるからです。

ちなみに，「比」(「いくつといくつ」に表現可能) から「合理 / 有理」の意味が派生してきたのには，古代ギリシャ人の独特の世界観があるとされています。



分母，分子は，「いくつといくつ」の表現に過ぎません。「真分数・仮分数」という概念がありますが，分母，分子の一方に特別な意味があるわけではありませんから，数学的には意味の無い概念です。

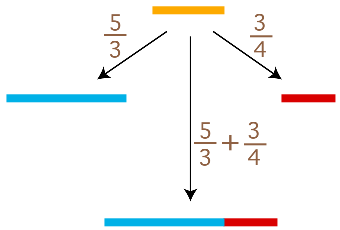
特に，過去の学習経験から「仮分数は帯分数に直さなければ間違い」みたいな思いを持っているとしたら，ここで改めてください。実際，「帯分数」は，数学的には無用の概念です。――日常的にも無用と言っていいでしょう。

3.2 算法

和と積は数の要件ですが，分数においてこれがどのように定まるかを，つぎに見ていきます。

3.2.1 和・加法

数の和は，倍の和として定められます(§1.3.1)。そこで分数の場合，例えば 量＝長さでは，右図のようになります：



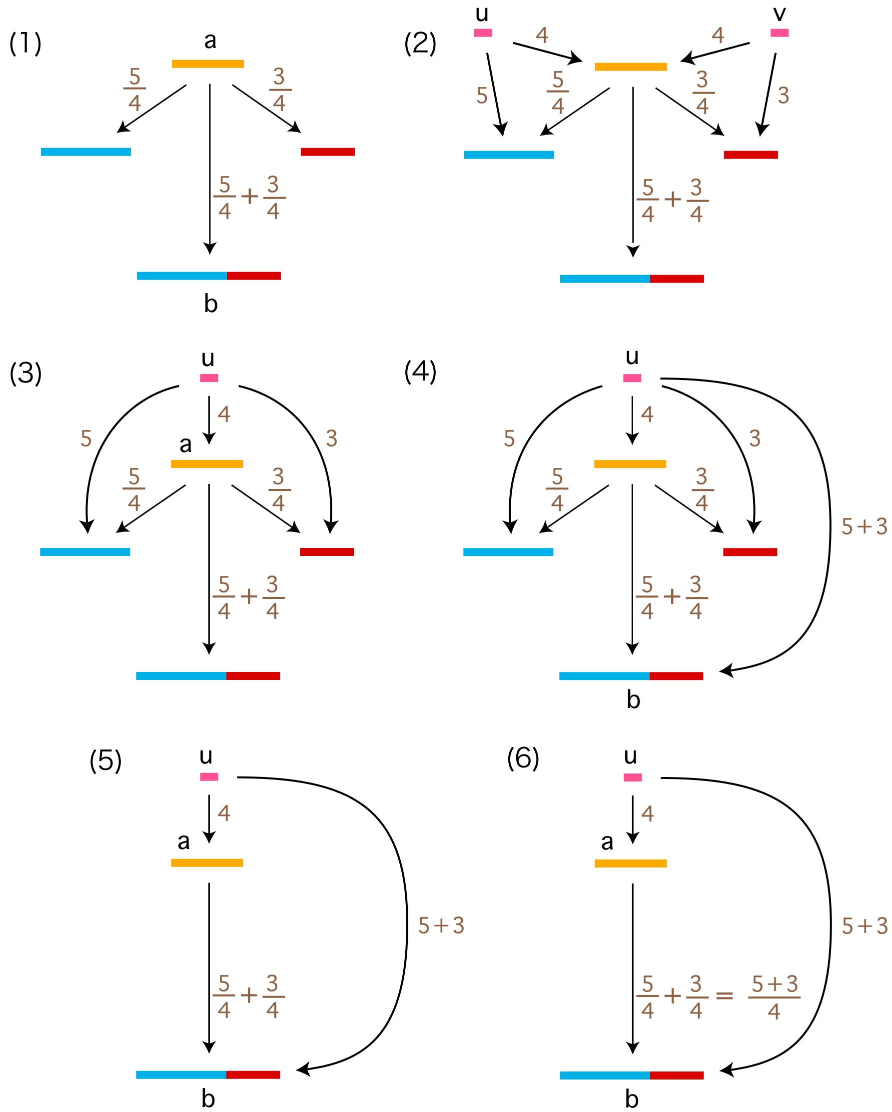
さて，上の形が成り立つようにするには，分数の和をどのように定めたらよいでしょう？——結論から言うと，つぎのように定めるとよいわけです：

同分母の分数において， $\dfrac{m}{k} + \dfrac{n}{k} = \dfrac{m+n}{k}$

実際，異分母の分数の場合は，同値な同分母分数に直せますから，上のように決めることで分数の和を定めたことになります。

以下，上の式が成り立つことを見ていきましょう：

(1) 同分母分数 5/4, 3/4 の和を考えます。
(2) 分数 5/4, 4/3 の意味により，図の条件を満たす量 u, v がとれます。
(3) u の 4 倍と v の 4 倍が同じ a であることから，u と v は同じ。
(4) b は u の (5 + 3) 倍
(5) a と b は，u によって 4 ：(5 + 3) の比になっている。
(6) よって，a に対する b の比は，(5 + 3)/4。



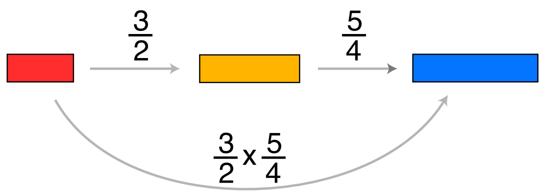
和が定まれば，加法 (つぎの関数) も定まります。

$(m,\ n) \longmapsto m+n$

(「２数にそれの和を対応させる関数」)

3.2.2 積・乗法

数の積は，倍の合成として定められます (§1.3.2)。そこで分数の場合，例えば 量＝長さでは，つぎのようになります：



さて，上の形が成り立つようにするには，分数の積をどのように定めたらよいでしょう？——結論から言うと，一般につぎのように定めるとよいわけです：

$$\frac{n}{m} \times \frac{q}{p} = \frac{n \times q}{m \times p}$$

以下，上の式が成り立つことを見ていきましょう：

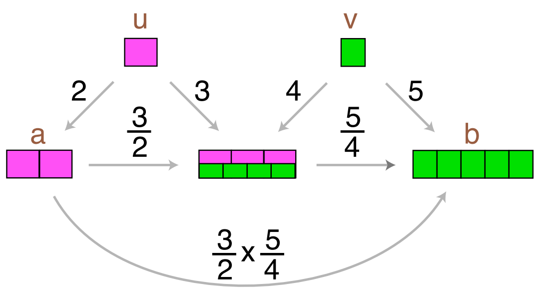
(1) 分数 3/2，4/3 の意味により，図の条件を満たす量 u, v がとれる。

(2) u の 3 倍と v の 4 倍が同じであることから，図の条件を満たす量 w がとれる。

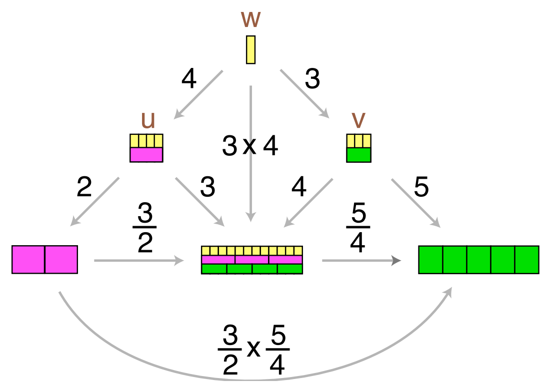
(3) a は w の (4×2) 倍，b は w の (3×5) 倍。すなわち，

(4) a と b は，u によって (4×2)：(3×5) の比になっている。
よって，a に対する b の比は，(5 + 3)/4。

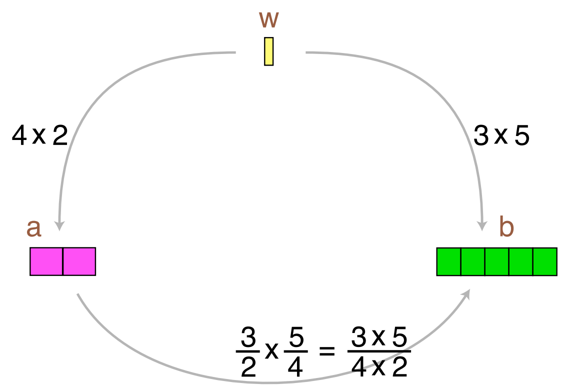
(1)



(2)



(3)



こうして積が定まることにより，乗法 (つぎの関数) も定まります：

(m，n) $\longmapsto$ m × n

(「２数にそれの積を対応させる」)

3.2.3 差

2 数m，n の差「n – m」は,「mを足して n になる数」の言い換え (簡略表現) として定義されます (§1.3.3)。そこで，分数では，つぎのようになります：

$$\frac{m}{k}-\frac{n}{k}=\frac{m-n}{k}$$

異分母の分数の場合は，同値な同分母分数に直せますから，上のように決めることで分数の差の公式を示したことになります。

この式についても，理由 (成り立つことの説明の仕方) をいちおう確認しておきましょう：

(m/k) – (n/k) の意味は「n/k を足して m/k になる数」。一方，(m – n)/k は「n/k を足して m/k になる数」：

$$(m-n)/k + n/k = ((m-n)+n)/k = m/k$$

3.2.4 商

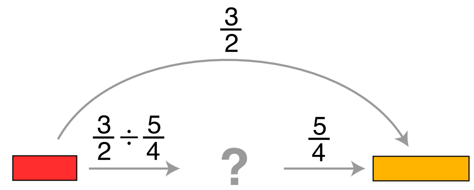
商「n ÷ m」は，「mと掛けて n になる数」の言い換え (簡略表現) として定義されます (§1,3,4)。そして，分数では，つぎのようになります (「÷ 分数は，ひっくり返して掛ける」)：

$$\frac{n}{m}\div\frac{q}{p}=\frac{n}{m}\times\frac{p}{q}$$

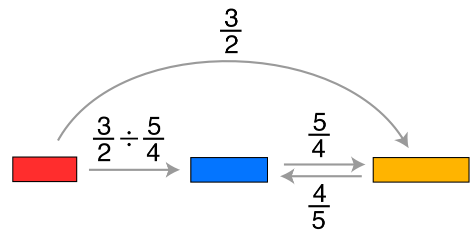
以下，これが成り立つことを見ていくことにします。

わかりやすいように，具体的な数字と量＝長さを使うとしましょう。(3/2)÷(5/4) を例とします。

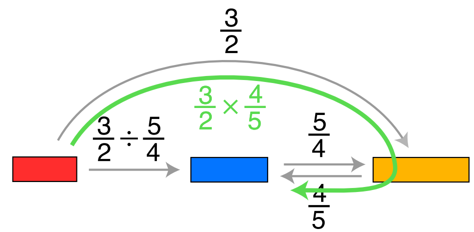
(3/2)÷(5/4) とは「5/4 とかけて 3/2 になる数」のことです。倍のことばで言い直すと，「((3/2)÷(5/4)) 倍して 5/4 倍するのは，3/2 倍に同じ」となります。これを図に表すと，つぎのようになります：



((3/2)÷(5/4)) 倍がどれだけなのかわかっていませんので, 真ん中の量が「？」になっています。しかし，この量は，5/4 倍の逆倍である 4/5 倍をつぎのように図中に入れることで，具体的にわかります：



さらに，青が赤の ((3/2)×(4/5)) 倍であることがわかります：



一方，青は赤の ((3/2)÷(5/4)) 倍です。よって，つぎの式が得られます：

$$\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}$$

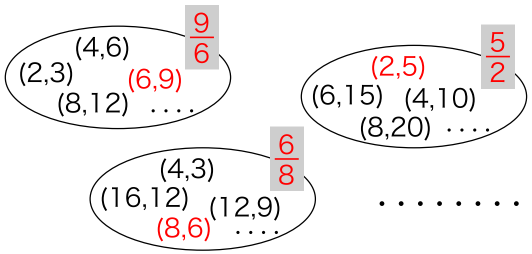
3.3 分数の数学的定義

実はここまで,「分数」と言いながら, 倍表現の「いくつといくつ」に対する「分数」の存在をあいまいにしてきました。

分数の数学的定義は, 分数の構築に代えられます。ただし, 行うことは単純です——同値な「いくつといくつ」を一つに束ねることです。すなわち：

「いくつといくつ」の比表現で*同値になる自然数のペア全体を*,
一つの数 (分数) と考える。

例えば , (2,3), (4,6), (6,9), (8,12), ... は同じ比の表現をつくる自然数のペアですが, これら全部をひとくくりにして, 一つの数とします。この数は (2,3), (4,6), (6,9), (8,12), ... のうちの一つを使って , 例えば (6,9) を使って「9/6」と表現します。



「分数 + 整数」「分数 × 整数」のような言い回しに出会うことがありますが , それらは実はつぎのようなことです :

1. 整数は分数に同一視されている (身分は整数ではなく分数)。
2. したがって ,「分数 + 整数」は「分数 + 分数」,「分数 × 整数」は「分数 × 分数」, 等々。

実際 ,「+」「−」「×」「÷」は , 一つの数の系に対して定義されるものです。異なる数をまたがって定義される「+」「−」「×」「÷」は, ありません。

分数に関する虚偽概念

現代数学の特徴に, 「構造化」があります。これは, 対象の把握を, 「構造を明らかにする」というスタンスで行おうとするものです。

この方法は, 手近な意味にとらわれることで混乱して理解され探究されていた主題を明解な形に現す, ということに著しい成果をもたらしました。例えば, 「関数」の現代的解釈は, 古典的な関数概念に比べて, ひじょうに簡明・機能的になっています。

従来の分数教育の中に現れていた分数に関わる概念のうちには, 「構造」の視点に立つことでただちにそれの虚偽性が明らかになるものがあります。

「真分数・仮分数」, 「帯分数」, 「単位分数」は, 虚偽概念です。実際, 分数の本義「自然数の対の形による比の表現」に帰れば, このような概念に数学的な意味はありません。

また, みなさんは ,「割合分数」, 「量分数」, 「分割分数」のような言い回しに出会ったことがあるかも知れません。これらは, 分数の式が現れる問題や表現のタイプと分数そのものの意味を混同した虚偽概念です。

すなわち, 分数は道具として, 割合の問題や表現の中にも, 分割の問題や表現の中にも, 量の問題や表現の中にも, 現れることができます。また, 形としての量（量のモデル）は数で構成されますので, 数を量として扱うこともできます (§1.5)。しかしこれらのことは, 分数に「割合分数」, 「量分数」, 「分割分数」のようなものがあることを意味しません。

「虚偽概念の論理的説明」は, 「非論理の論理的説明」という構造上, 話しがややこしくなります。また, 「割合分数」, 「量分数」, 「分割分数」等のことばに出会っていない読者には, 無用の話です。したがって, それらがどういった概念かについては, 本書では触れません。

(参考文献 :『数は量の比——「数は量の抽象」ではない』)

4. 小数

小数で対象になる量は，分数で対象になる量と同じです。すなわち，稠密量です。稠密量における２量の比 (倍関係) を表現する仕方の違いが，分数と小数という２種類の数になって出てきます。

分数と小数が対象とする量は同じですが，日常生活では小数がもっぱら使われます。それは, 小数が十進数の延長になるからです。

4.1 小数の数としての位置

「小数」は，それ自体で数の系として成り立つところの，れっきとした数です。
系としての小数は，数学的に，分数の系に埋め込んで考えることができます。
しかしだからといって，「小数は分数の特別なもの」というのではありません。

4.1.1 対象とする量：稠密量

小数で対象になる量は, 分数で対象になる量と同じです。すなわち, 稠密量です。
稠密量における２量の比 (倍関係) を表現する仕方の違いが，分数と小数という２種類の数になって出てきます。

4.1.2 十進数の延長

分数と小数が対象とする量は，ともに稠密量ということで，同じです。しかし，日常生活では小数がもっぱら使われます。それは，小数が十進数の延長になるからです。
以下，このことを説明します。

小数の起源は，「← 十進数 ← 自然数 ← 個数 (離散量)」のように溯ります。
出発は，個数（離散量）の対象化です。
そして，個数を表現しようとする実践の中から，自然数 (系列) がつくられてきます。
「系列」の数学的定式化は，ペアノの公理です。

「系列」の実現の仕方は，一通りではありません。
「系列」の実現方法として，「十進数」が考え出されました。いまは，世界的にこの「十進数」が用いられています。

十進数の「十」は, 人の指の本数が十であることに拠ります。指で数える行為が, 自ずと「十進」を導いたのです。数としての特別な意味が「十」にあるわけではありません。

この十進数で個数を数えるとき，例えば 1234 個は,

10 個の 10 個の 10 個が１つ
10 個の 10 個が２つ
10 個が３つ
個が１つ

と同じになります。このことを転じて,

・・・・
10 個の 10 個の 10 個
10 個の 10 個
10 個
個

の単位システムを予めつくっておいて,

・・・・
10 個の 10 個の 10 個がいくつ
10 個の 10 個がいくつ
10 個がいくつ
個がいくつ

(「いくつ」は 0〜9)

と数える方法が考え出されてきます。
この方法だと, 労力を劇的に減らすことができます。実際, これが十進数で個数を数える方法になっています。

「・・・・, 10 個の 10 個の 10 個, 10 個の 10 個, 10 個, 個」の単位システムの要点は, 十進のシステムだということです。

ここで, 場面は「稠密量」になります。稠密量が対象化され, 稠密量の表現が課題とされます。

離散量は,「個」という原子（部分のないもの）を考えます。この「部分がない」の制約を外して「任意に部分をとれる」にすると, 稠密量の概念になります。稠密量の「稠密」の意味は, 「任意に部分をとれる」です。

離散量では, 量を「個がいくつ」で表しました。このことを, ここでつぎのように解釈します：

量は, 「もとの量の何倍」で表す。
離散量では,「もとの量」が「個」になっていて,「何倍」が「いくつ」になっている。

稠密量の場合,「もとの量」は全く恣意的に決めることになります。これは「個」ではないので, 新たに「単位」と呼びます。

稠密量を表現するのに, 十進数による個数の数え方をヒントにします。
十進数による個数の数え方は,

・・・・
10 個の 10 個の 10 個
10 個の 10 個
10 個
個

の単位システムを予めつくっておいて,

・・・・
10 個の 10 個の 10 個がいくつ $_{(3)}$
10 個の 10 個がいくつ $_{(2)}$
10 個がいくつ $_{(1)}$
個がいくつ $_{(0)}$)

(「いくつ $_{(k)}$」は 0〜9)

と数えます。このとき,

・・・・ [いくつ $_{(3)}$] [いくつ $_{(2)}$] [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$]

が個数と一致します。

この方法を，素直に拡張 (延長) します。すなわち，単位からつぎの単位システムを導きます：

····
単位の 10 倍の 10 倍の 10 倍
単位の 10 倍の 10 倍
単位の 10 倍
単位
単位の 10^{-1} 倍
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍
····

そして，量をつぎのように測ります：

····
単位の 10 倍の 10 倍の 10 倍がいくつ $_{(3)}$
単位の 10 倍の 10 倍がいくつ $_{(2)}$
単位の 10 倍がいくつ $_{(1)}$
単位がいくつ $_{(0)}$
単位の 10^{-1} 倍がいくつ $_{(-1)}$
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍がいくつ $_{(-2)}$
単位の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍の 10^{-1} 倍がいくつ $_{(-3)}$
····

(「いくつ $_{(k)}$」は 0～9)

そして，つぎを倍の表現にします：

···· [いくつ $_{(3)}$] [いくつ $_{(2)}$] [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$] .
[いくつ $_{(-1)}$] [いくつ $_{(-2)}$] [いくつ $_{(-3)}$] ····

「.」は, どれが [いくつ $_{(0)}$] であるかを示すための記号で,「小数点」と呼びます。

[いくつ] をただ並べただけでは，倍の表現が一意になりません。そこで，「小数点」のような工夫が必要になるわけです。

この方法で表現された倍は， 0～9 と小数点がつくる文字列になっています。
この文字列を「数」と定めて，「小数」と呼びます。
「数」と定める根拠は，これが倍の表現になっており，そして (この後で示されるように)「数の和・積」をこれに対して定義することができるからです。

小数による量表現は，十進数による個数表現とつぎのように密接につながっています：

単位の
[いくつ $_{(n)}$] ···· [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$] . [いくつ $_{(-1)}$] ···· [いくつ $_{(-m)}$]
倍は，＜単位の 10^{-m} 倍＞の
[いくつ $_{(n)}$] ···· [いくつ $_{(1)}$] [いくつ $_{(0)}$] [いくつ $_{(-1)}$] ···· [いくつ $_{(-m)}$]
倍。

そしてこれを用いることで，小数の和・積の筆算法が導かれます。
すなわち，小数の和・積は，十進数の和・積の筆算と小数点の処理を合わせる形で，求められるものになります。

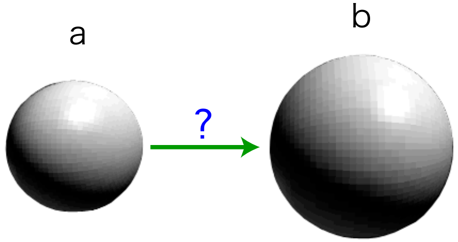
4.2 小数倍

分数が自然数に替わって倍表現の道具になるような場面とは, 自然数では「はんぱな量」が出てきてしまう場面のことです。しかし，これが生活の場面であるときには，多くの場合（ほとんどの場合)，分数ではなく「小数」と呼ばれる倍の表現が使われます。

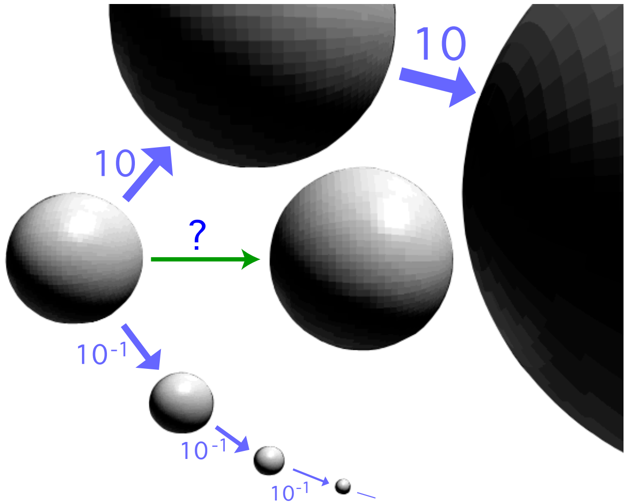
4.2.1「小数」という形の倍表現

「小数」という形の倍表現は，つぎの規則でつくられます。(量イメージは体積です。)

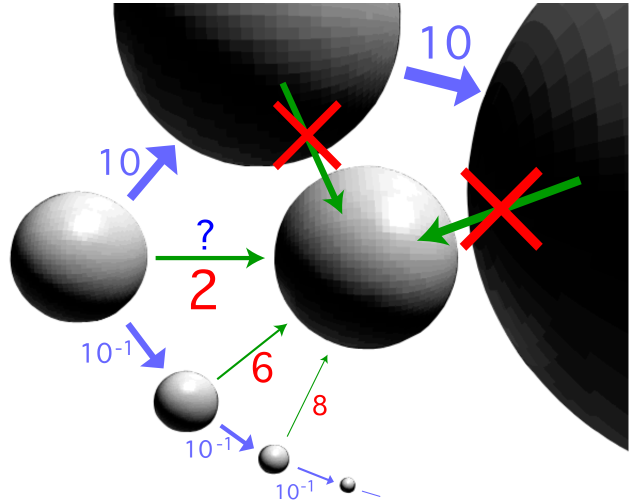
(1) つぎの二つの体積の間の比 (倍関係) が問題になっているとします：



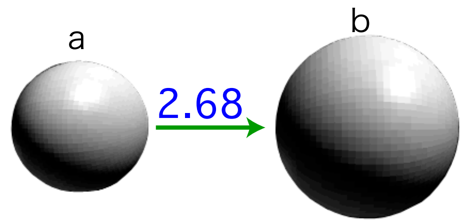
(2) もとにする量 a に対し，これを基にした十進の単位システムを導きます：



(3) 大きい単位の方から順に，比べる量 b にいくつ入るか数えていきます。——余りが出たら，それの一つ下位の単位で同じことをします。

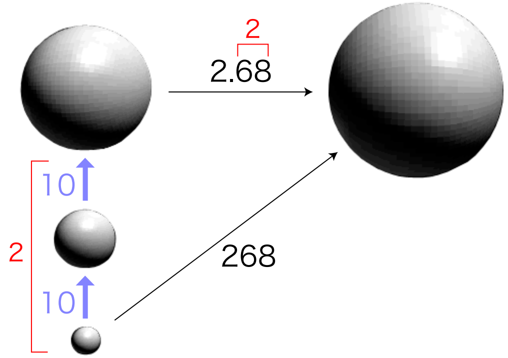


(4) 操作の結果が上のようになったとき，求める比 (倍関係) をつぎのように倍表現します。——もとにする量 a に対応する数値を示すために「小数点」を使います。

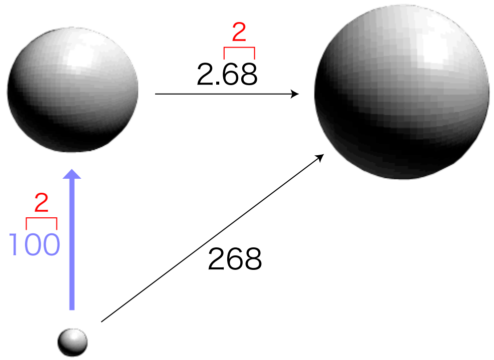


4.2.2「小数」の文法

小数倍——例えば，2.68 倍——は，つぎのように分析されます：



結局，



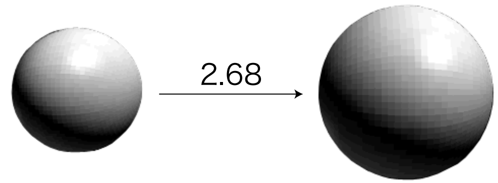
要点は，つぎの２つです：

1.「2.68」から小数点をとった「268」が，どんなふうに現れるか？
2.「2.68」の小数点以下の数字の個数２が，どんなふうに現れるか？

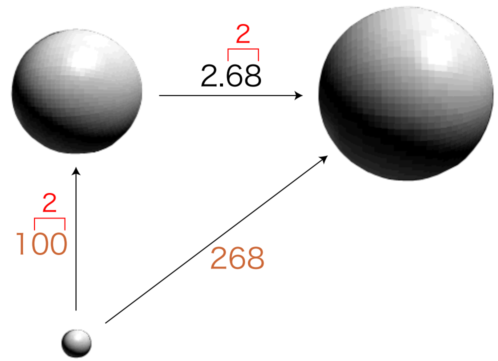
小数点以下の数字の個数は，＜ 10‥‥0 倍＞の０の個数と対応しているわけです。

4.2.3 小数を分数に翻訳

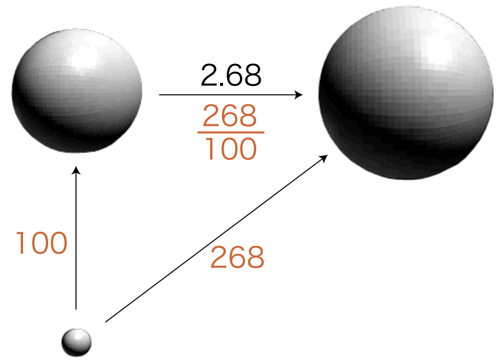
小数から分数への換算法の理由 (説明の仕方) も，念のため確認しておきましょう。小数「2.68」を例にします：



この表現の意味は，つぎのようになります (「小数点」の文法) :



分数の定義から：



結局，つぎの規則で，小数が分数に翻訳されることになります：

小数の小数点を除いて得られる整数を，分子に。
１の後ろに＜小数点以下の数の個数＞だけ０をつけた整数を，分母に。

$$2.\overbrace{68}^{2} = \frac{268}{1\underbrace{00}_{2}}$$

4.3 算法

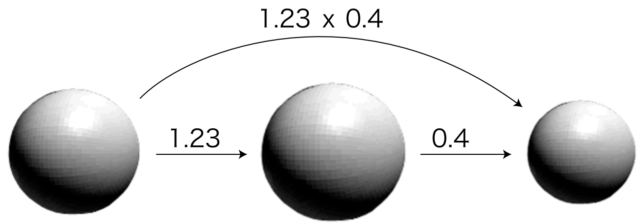
比 (倍) の表現としてつくられた小数では，倍の和，倍の合成として，和と積が定義されます。こうして小数は，確かに「数」と呼ばれるものになります。

4.3.1 小数の求積計算

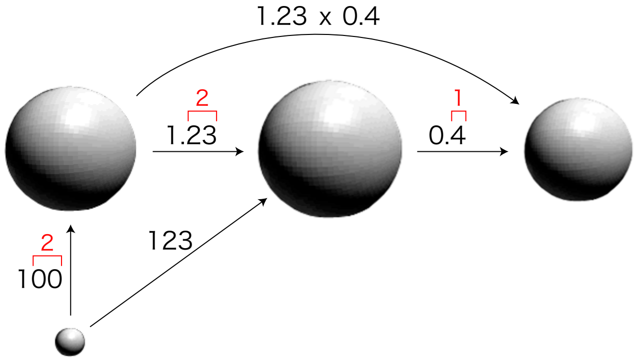
小数の求積計算は，つぎのものです：

２つの小数の小数点を無視して，かけ算をする。
２つの小数の小数点以下の桁数を足す。
この数が小数点以下の桁数になるように，かけ算で出した数に小数点をつける。

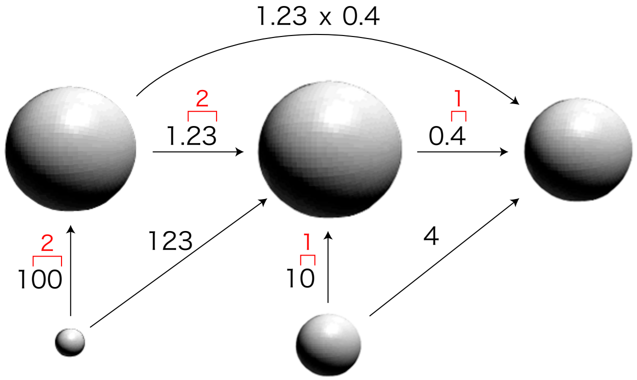
この計算法の理由は，つぎのようになります。――例として 1.23 × 0.4 を考えます：



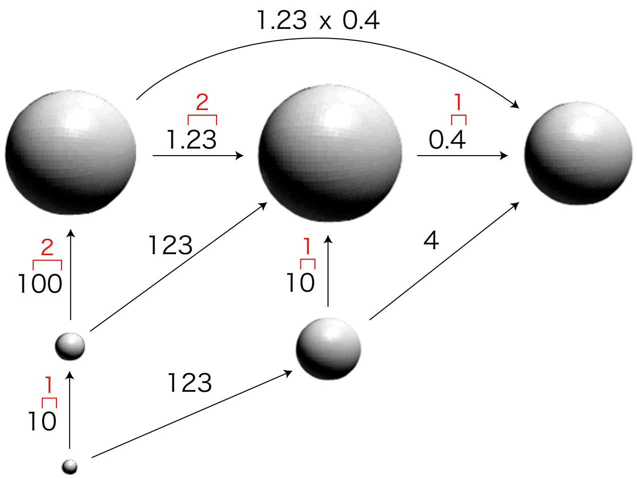
「1.23」を分析 (「小数点」の文法) ：



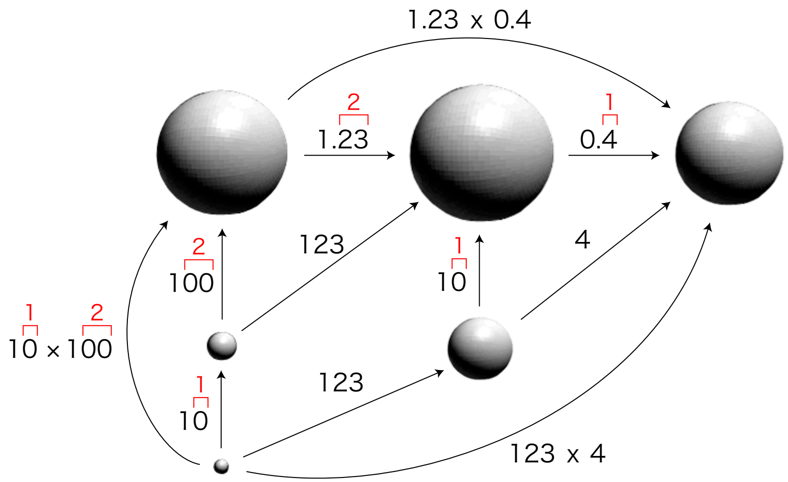
「0.4」を分析：



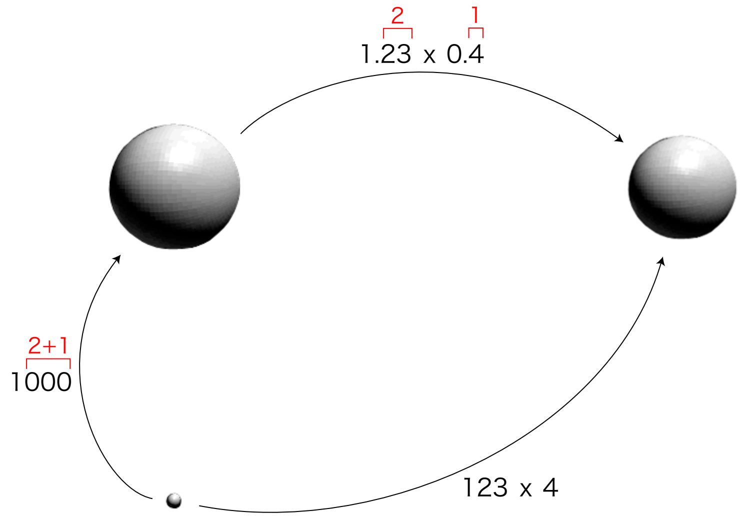
「10 × 123 ＝ 123 × 10」：



「×」の文法：



つぎの図式に到達：



この図式は，つぎのことを示します (§「小数」の文法)：

　「*1.23 × 0.4 の表す小数は,*
　　123 × 4 の値の下 (2 + 1) 桁を小数点以下にしたもの。」

なお，「小数を分数に翻訳」と「分数の積」を既習として使うことにすれば，小数の求積計算法の説明が，上に示したものより簡単になります：

1. 小数を分数に替える。
2. 分数の積を求める（分子同士をかけ，分母同士をかける)。
3. 得られた分数を，小数に替える。

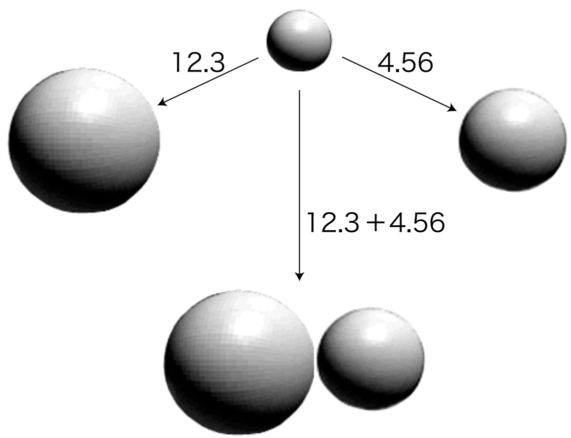
このとき,「分子同士をかける」が「整数計算」に ,「分母同士をかける」が「小数点の位置の計算」に，それぞれ対応しています。

4.3.2 小数の求和計算

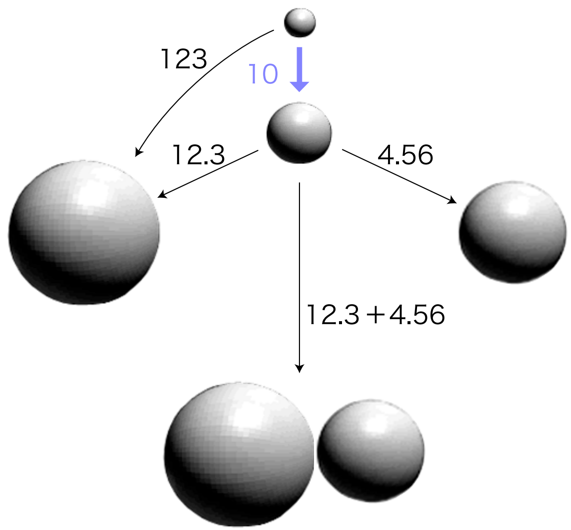
小数の求和計算は，つぎの２つを合わせたものになります：

　「小数点の位置で並べる」
　「自然数の求和計算」

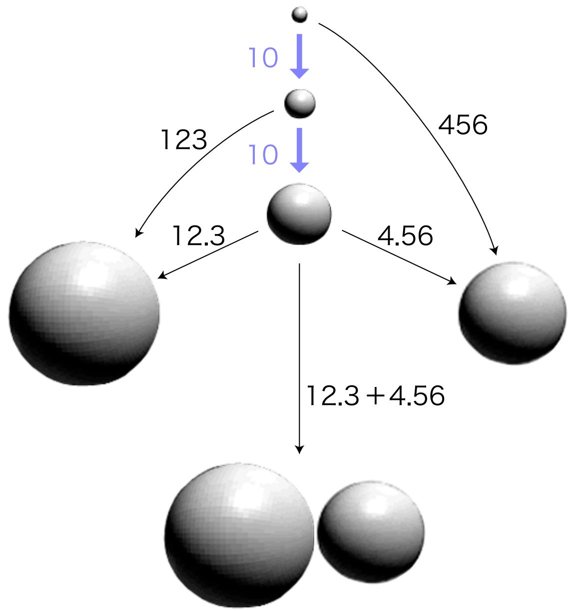
この計算法の理由は，つぎのようになります。──例として 12.3 ＋ 4.56 を考えます：



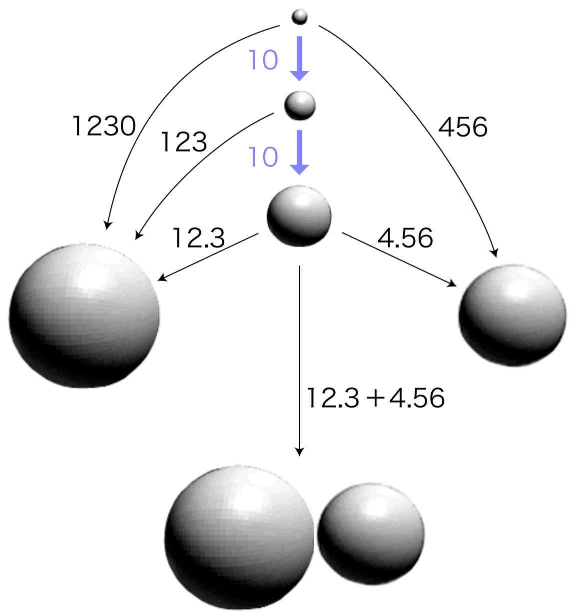
「12.3」を分析 (「小数点」の文法)：



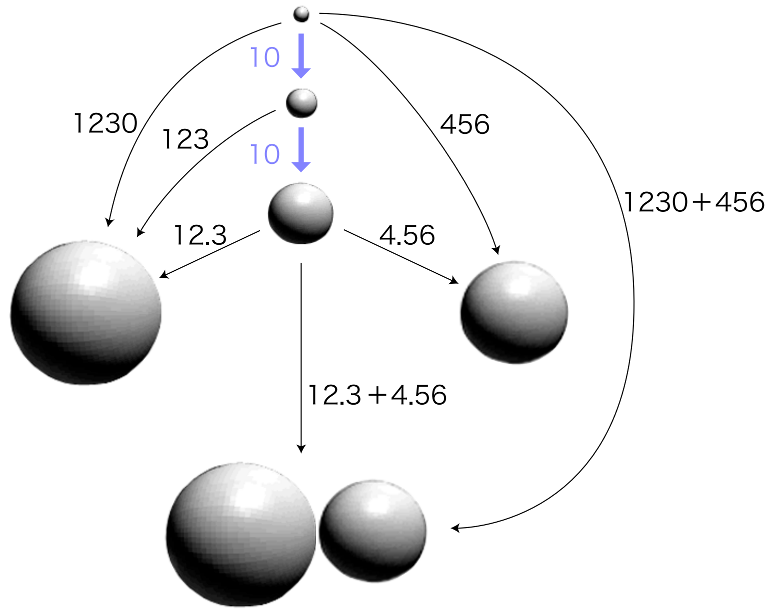
「4.56」を分析：



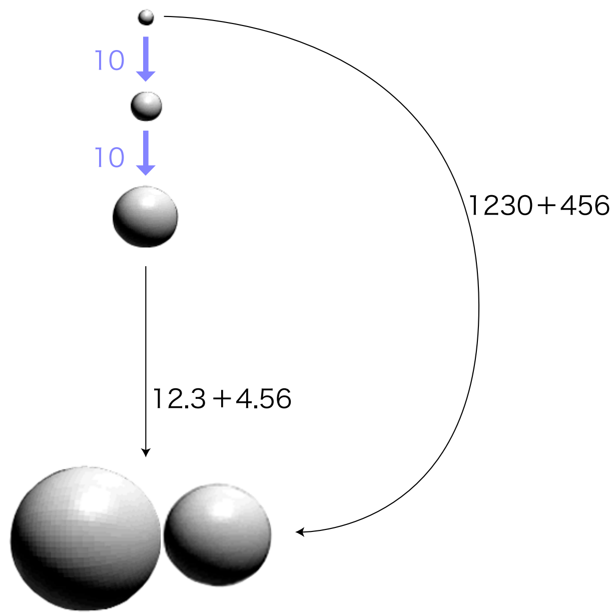
最小単位をそろえる：



「＋」の文法：



つぎの図式に到達：



この図式は，つぎのことを示しています (§「小数点」の文法)：

「12.3 ＋ 4.56 の表す小数は，小数点をそろえ
形の上で 1230 ＋ 456 の計算をして，得られる。」

5. 正負の数

小学算数での自然数 , 分数に続いて , 中学数学では「正負の数」が登場します。

「正負の数」の意義は ,「正逆２方向をもつ量」の比を表現することです。特に,「正負の数」の導入は「正逆２方向をもつ量」を導入することと同じです。

「正負の数」は , 数の系としては , 自然数に対する整数 ,「分数」に対する有理数ということになります。これは , つぎの形の「数の拡張」です：

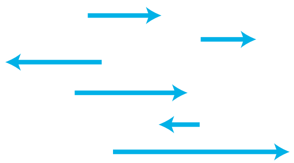
「もとの数の系にそれの鏡像を加える」

5.1 正逆２方向をもつ量

中学数学になると，「正負の数」が登場します。

「正負の数」の用途 (意義) は，正逆２方向をもつ量の比 (倍関係) を表現することです。すなわち，正負の数は ,「正逆２方向をもつ量の比の表現」として導入されます。

「正逆２方向の量」は，右図のようにイメージされます：

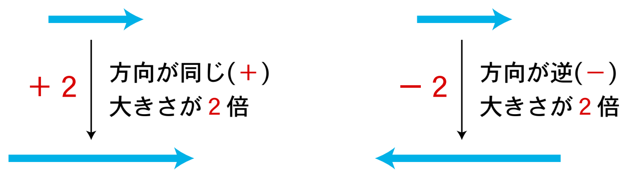


「正逆２方向をもつ量の比の表現」のアイデアは，きわめて簡明です。それは，つぎの二つの内容の組をそのまま比の表現にするということです：

・方向が同じか逆か
・大きさは何倍か

すなわち，つぎのようにします (例)：

・方向が同じ (＋) で大きさが２倍ならば，＋２
・方向が逆 (−) で大きさが２倍ならば，−２



さて，「正負の数」を倍表現として導入しましたが，先回りして言うと，これは「数」の系を形成します。――算法をこれから加えていきますが，最終的に「数」の条件を満たすシステムになります。

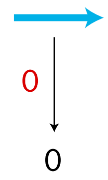
そこで，「正負の数」の各要素 (＋２, −３など) を，いまからもう数と呼ぶことにします。

また，＋，−をこの数の符合と言い，符合が＋の数を正数，−の数を負数と呼びます。

5.2 零

「正逆２方向をもつ量」においては，量「零 (ゼロ，０)」――大きさ０で方向をもたない量――を考えます。これは，計算処理の都合から導入されます。実際，これの導入により，「東へ２km と西へ２km の和は０」と答えることができるようになります。

０でない量に対する０の比として，数０を導入します：数０は，正数でも負数でもないとします。



量０と数０を厳格に区別してください (混同しないようにしてください)。

「東西２方向の移動」は,「正逆２方向をもつ量」の例になります。これを使って，正負の数の簡単な練習をしてみましょう：

(1)「東に２km」に対する「西に６km」の比は，方向が逆で，移動の大きさが３倍なので，−３。

(2)「西に６km」の ＋２/３ 倍は，方向が同じで移動の大きさが 2/3 倍ということで，「西に４km」。

Jump

数学では, 記号「0」を「加法に対する零元」の意味で使います。「正負の数」に関してここで導入した量「0」, 数「0」のどちらも条件：

任意の x に対して，$x + 0 = 0$

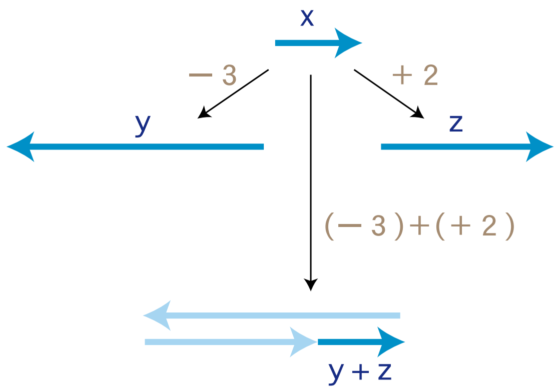
を満たすことになりますが , この条件を満たすものを「零元」と呼び「0」と書きます。

5.3 算法

和と積は数の要件ですが,「正負の数」においてこれがどのように定まるかを,つぎに見ていきます。

5.3.1 和・加法

数の和は, 倍の和として定められます (§1.3.1)。そこで,「正負の数」の場合は, 右図のようになります：



さて, 上の形が成り立つようにするには, 正負の数の和をどのように定めたらよいでしょう？——つぎのように定めればよい (定めるしかない) ことがわかります：

(1) 同符号の２数の和は,

・符号はそのまま

・絶対値は, ２数の絶対値の和

(2) 異符号の２数の和は,

・符号は, 絶対値が大きい数の符号

・絶対値は, ２数の絶対値の差で正の方

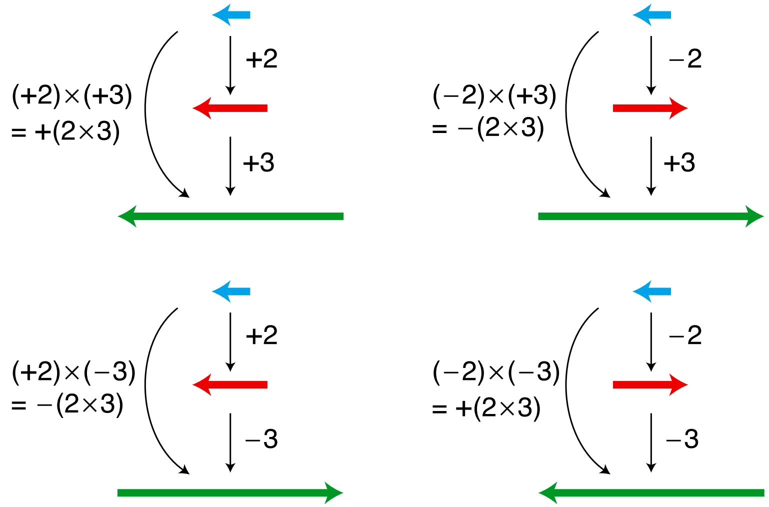
和が定まれば, 加法 (つぎの関数) も定まります：

$$(m, n) \longmapsto m + n$$

(「２数にそれの和を対応させる」)

5.3.2 積・乗法

数の積は, 倍の合成として定められます (§1.3.2)。そこで, 正負の数の場合は, つぎのようになります：



さて, これらの等式が成り立つようにするには, 正負の数の積をどのように定めたらよいでしょう？——つぎのように定めればよい (定めるしかない) ことがわかります：

(1) 同符号の２数の積は,

・符号は＋

・絶対値は, ２数の絶対値の積

(2) 異符号の２数の積は,

・符号は−

・絶対値は, ２数の絶対値の積

こうして積が定まることにより, 乗法 (つぎの関数) も定まります：

$$(m, n) \longmapsto m \times n$$

(「２数にそれの積を対応させる」)

5.3.3 差

2 数m , n の差「n - m」は,「mを足して n になる数」の言い換え (簡略表現) として定義されます (§1.3.3)。そこで,「正負の数」では, つぎのようになります:

(+ 3) – (+ 2)

(+ 3) – (+ 2) の意味は「+ 2 を足して+ 3 になる数」。このことを式に書くと：

$$((+ 3) - (+ 2)) + (+ 2)) = + 3$$

左辺の + 2 をキャンセルするために，両辺に – 2 を加える：

$$((+ 3) - (+ 2)) + (+ 2)) + (- 2) = (+ 3) + (- 2)$$

よって,

$$(+ 3) - (+ 2) = (+ 3) + (- 2)$$

(+ 3) – (– 2)

(+ 3) – (– 2) の意味は「– 2 を足して+ 3 になる数」。このことを式に書くと：

$$((+ 3) - (- 2)) + (- 2)) = + 3$$

左辺の – 2 をキャンセルするために，両辺に + 2 を加える：

$$((+ 3) - (- 2)) + (- 2)) + (+ 2) = (+ 3) + (+ 2)$$

よって,

$$(+ 3) - (- 2) = (+ 3) + (+ 2)$$

また，この二つの結果に，「差の式から和の式への変形規則」を読むことができます：

– (+ → + (–

– (– → + (+

5.3.4 商

商「n ÷ m」は，「mと掛けて n になる数」の言い換え (簡略表現) として定義されます (§1.3.4)。そこで「正負の数」では，以下が導かれます：

		m ÷ n	
		符号	絶対値
m，n	同符号	+	2数の絶対値の商
	異符号	–	

「正負の数」の倍表現のしくみは，ここで示したように，きわめてシンプルなものです。しかし，中学数学の「正負の数」の指導は，「このしくみを先ず明示する」というようにはなっていません。例えば，つぎのような指導をします：

問題：「東へ向かって毎分 60m で歩いている人がいます。いまより 5 分前の位置は？——正負の数を使って表しなさい。」

指導：「速さ × 時間＝距離」に数値をあてはめると,

$$(+ 60)\times(- 5) = - (60\times5)$$

問題：「西に向かって毎分 60m なら，いまより 5 分前は？」

指導:さっきとは向きが逆。「速さ × 時間＝距離」に数値をあてはめると,

$$(- 60)\times(- 5) = + (60\times5)$$

負数と負数をかけると正数になっている。

(だからこれからも, 負数 × 負数はこんなふうに計算しましょう。)

結局は，方便を使って計算規則を飲み込ませることが，この「指導」の内容になっています。(実際のところ，この問題は，正逆 2 方向をもつ 2 量の間の比例関係の問題ですので，きちんと論理的に解く (§7.5) のはたいへんです。)

5.4 三種類の「–」

いまわたしたちの前に 3 種類の「–」があります。——負符号の「–」, 差の記号の「–」, 対称化記号の「–」です。

例えば, 式

$$(+2) - (-(-3))$$

の中の 3 つの「–」は, 左から順に, 差の記号の「–」, 対称化記号の「–」, 負符号の「–」です。

ここで, 互いを視覚的に区別できるよう, 右のように色分けします。このとき：

–	：	負符号
–	：	対称化記号
–	：	差の記号

(1) 負符号の「–」と対称化記号の「–」の関係：

$$(-3) = -(+3)$$

$$-(-3) = +3$$

(2) 差の「–」と対称化記号の「–」の関係

2 数 m,n に対し,「n – m」は,「m + x = n を満たす x」と定義されました。

したがって,

$$(n - m) + m = n$$

です。そしてこの式の両辺に – m を加えると, つぎの式が得られます。

$$n - m = n + (-m)$$

応用：

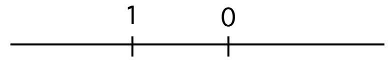
$$(-2) - (-3)$$
$$= (-2) + (-(-3)) \qquad (2) \text{ より}$$
$$= (-2) + (+3) \qquad (1) \text{ より}$$

一つの記号「–」を 3 つの異なる意味に混用することは, 学習者にとって混乱のもとです。しかし一方, 計算等では混用した方が使い勝手がよいという, 実用的メリットがあります。

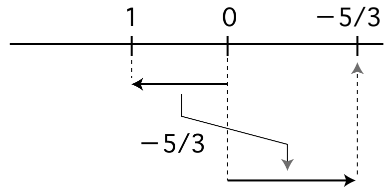
5.5 数直線

§1.5 で「数直線」の方法を示しましたが, この方法をそのまま使って,「正負の数」の数直線が得られます。

いま, 数直線を



のように書くとき, 例えば,「-5/3」が表示される構造は, つぎのようになります：



数直線の「基準」に来る「0」

数直線では,「基準」としてプロットした点に数「0」が来ます。0 を置くと整合するからです。——上の操作で「– 5/3」のかわり「0」を考えると,「大きさのない量」がでてきます。「大きさのない量の端を基準にあわせるとその先端は？」はイマジナリーな操作で理屈には合いませんが, 0 が基準の場所にくるという感じはつかめるでしょう。

なお, 0 の存在しない (0 を導入しない) 数の系では,「基準」の場所に来る数はありません。しかし, 数の系には, 使い勝手をよくするために, 0 が加えられます (§2.7)。したがって, 数直線は, 0 をもつ数の系が前提だとしてかまいません。

5.6「正負の数」の数学的定義

実はここまで,「正負の数」と言いながら,「倍表現」に対する「数」の存在をあいまいにしてきました。

「正負の数」の数学的定義は,「正負の数」の構築に代えられます。そこで行うことは,単純です——差の表現で同値になる数のペアを一つに束ねることです。すなわち:

差の表現「$n - m$」で同値になる数のペア全体を,
新しい一つの数と考える。

例えば,

(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), ...

は同じ差の表現をつくる自然数のペアですが,これら全部をひとくくりにして,一つの数 (整数) とします。

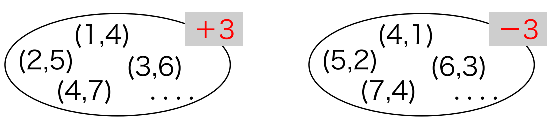
そしてこの数の表現ですが, つぎのようにします（結果として,「正負の数」になります）:

この数は (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), ... のうちの一つを使って,例えば (2,5) を使って「5 – 2」と表現してもいいのですが,前項＋ x ＝後項 となる x, すなわち 3, を使って「3」と表現する方法も立ちます。ただしこの方法では, (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), ... と対称的な

(4,1), (5,2), (6,3), (7,4), ...

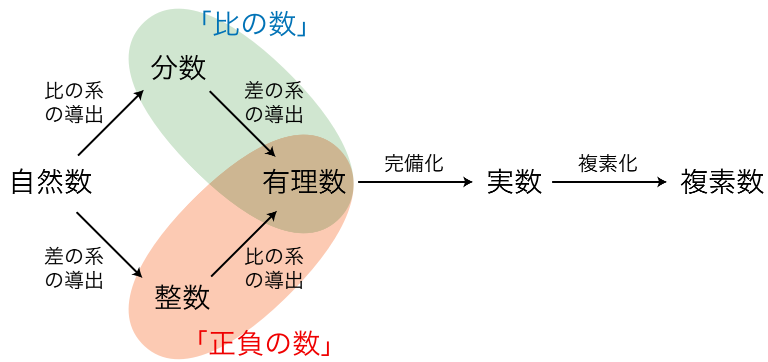
でつくられる数の表現を考慮する必要があります。(この場合, 前項＋ x ＝後項 となる自然数 x は存在しませんが,前項＝後項＋ x となる自然数 x は存在して,やはり 3 です。)

そこで,先の数を「＋ 3」, 後の数を「– 3」と表現して, 互いに区別できるようにします。対称性も簡明に表現されますので, この表現で決着です！



5.7「正負の数」の位置づけ

数の系の位置関係における「正負の数」の位置は,つぎのようになります:



「正負の数」は,< 差の系の導出 > を方法とする, 数の拡張です (§4.6)。——整数,有理数が得られると,これのもとになった自然数と分数は, それぞれ「正の整数」と「正の有理数」と見直されることになります。

「正負の数」が < 差の系の導出 > であるのに対し, 自然数から分数, 整数から有理数の拡張は, ＜比の系の導出＞です (§3.4)。

「自然数」と「分数」は,小学算数の内容です。「正負の数」と「実数」(ただし「無理数」の形で) は, 中学数学の内容になります。そして「複素数」が高校数学に出てきます。

6. 実数

実数は ,(自然数 , 分数 , 正負の数 , 複素数と比べて) 著しく理念的な主題です。有理数から実数へと拡張は「完備性」の実現ということになりますが , この内容は大学の専門課程の数学の内容になります。

一方 , 実数のつぎの主題は実用的に重要であり , 小・中・高校数学の内容になります : 円周率 π などの幾何学的な長さの比 , 平方根 (一般に , 代数的無理数), ネピア数 e。

6.1 実数の導入

実数の導入は，論理的・存在論的に微妙なテーマです。例えば，つぎのような論法は妥当でしょうか？

> *すべての比を表現する数を「実数」と呼ぼう。*
> *正方形の 1 辺と対角線の長さの比が整数比 (分数 / 有理数) にならないように，実数には有理数でないものがある。それを「無理数」と呼ぼう。*

この論法では，実数の存在は，量の比の存在に依存していることになります。また，「*正方形の 1 辺と対角線の長さの比は整数比にならない*」は「ピタゴラスの定理 (3 平方の定理)」に依存していますが (§5.2), この定理の証明は等積変形に依存しています。しかし，このときの「依存の遡及」は，より確しからしいものへの収れんになっているのでしょうか？

このようなめんどうな問題をやり過ごすために, 実数の定義は「有理数を使って実数を構築する」というやり方をとります。その方法ですが，きちん述べると「実数論」という大部の内容になりますから，ここではアイデアだけ簡単に示すことにします。

(1) 実数の存り方を決める

$\sqrt{2}$ の実現を例にしましょう。$\sqrt{2}$ とは，$x^2 = 2$ を成立させる実数 x のことで，これは無理数です (§5.2)。そこで，有理数で $\sqrt{2}$ に近づいていくことを考えます──例えば，小数点以下を一つずつ増やしていく数列：

1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, 1414213, ‥‥

そして，この数列を $\sqrt{2}$ ということにしてしまいます。

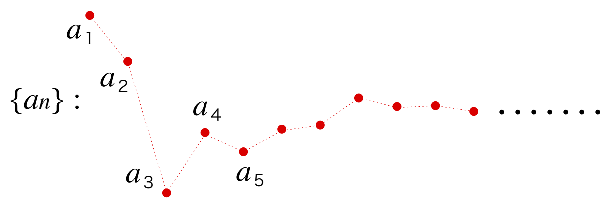
実際には，$\sqrt{2}$ に近づく有理数列はいくらでも異なるとり方ができますから，そのような数列を一つに同一視するルール (「*互いに限りなく接近する一様収束列*」) を導入し，そうして一本化されたものを $\sqrt{2}$ とします。

(2)「*項が互いに限りなく接近する有理数列*」

収束する数列は，先の方で項が互いに限りなく接近します。また，$\sqrt{2}$ に近づく有理数列は，(有理数の世界では収束しませんが)「先の方で項が互いに限りなく接近」するものになっています。

この条件「先の方で項が互いに限りなく接近」に目をつけて，「コーシー列」の名を与えます。

「コーシー列」のイメージ

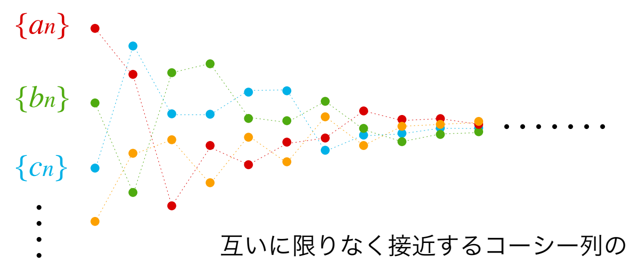


(3) 実数の定義

コーシー列を導入したところで，さらに「互いに限りなく接近するコーシー列全体」を一つの実数と定めます。これが実数構成のアイデアです。──そのココロは：

a) 無理数をコーシー列で表現するのはよいとしても，無理数一つに対しそれに近づくコーシー列は一つではない。
b) そこで，互いに限りなく接近するコーシー列全体を，一つの数 (実数) ということにしてしまおう。

「互いに限りなく接近するコーシー列」のイメージ



互いに限りなく接近するコーシー列のクラスを，一つの実数ということにする！

c) 従来の有理数，例えば 1.5 は ,1.5 に収束するコーシー列全体と同一視することで , 実数になる。よって , この実数の構成は「有理数の拡張」を実現していることになる。

(4) 和・積の定義

コーシー列 $\{a_n\}$ の属するクラスを $[\{a_n\}]$ で表すことにして，実数の和と積をつぎのように定めます：

$$[\{a_n\}] + [\{b_n\}] = [\{a_n + b_n\}], \quad [\{a_n\}]\times[\{b_n\}] = [\{a_n \times b_n\}]$$

さて，これで求めていた実数が得られたのでしょうか。√2 に近づく有理数列 $\{a_n\}$（例えば先の {1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, 1414213, ‥‥ } ）に対し，$\{a_n \times a_n\}$ は 2 に収束します。よって,

$$[\{a_n\}]^2 = [\{a_n \times a_n\}] = 2$$

すなわち，$x^2 = 2$ は実数では解をもつことになりました。

「これが実数 !?」と思われたかも知れませんが , ひじょうにテクニカルな装いになっているのは , 量などにに依拠せず有理数のみから実数を構成しようとしているためです。

「1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, 1414213, ‥‥」のように，数学の文章ではよく「‥‥」がでてきます。この「‥‥」は曖昧を意味するものではありません。数学では,

＜求めに応じていくらでも「‥‥」の表示を進めることができる
(これのアルゴリズムが存在する) ＞

ということをもって

＜存在する＞

に代えることを，手法の一つにしています。

Jump

実数の完備性

数論での「有理数の実数への拡張」の意義は,「完備化」です。これは,「収束する数列には極限をもたせるようにする」ということです。

本来，極限をもつことを「収束」と定義するわけですが，ここでの「収束」は,*「先にいくに従い, 系列の要素が限りなく近接する」*です。――先ほどは,√2 が極限になる有理数列

{ 1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, 1414213, ‥‥ }

を例にしました。

「完備化」とは,*「何かに限りなく近づいているのにその何かがない」*状態をなくそうということです。そして，有理数の完備化として，実数を,「互いに限りなく近接するコーシー列全体でなるクラス」と定義しました。

さて，*「収束する数列は極限をもつ」*は，実数において確かに実現されたのでしょうか？ <u>実数において</u>数列 { 1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, 1414213, ‥‥ } が極限をもつことを，概略で示しましょう。

実数 1.4, 1.41, 1414, ‥‥ は，それぞれ有理数列のつぎのクラスです：

a_1 = [{ 1.4, 1.4, 14, 14, ‥‥ }]
a_2 = [{ 1.41, 1.41, 141, 141, ‥‥ }]
a_3 = [{ 1414, 1414, 1414, 1414, ‥‥ }]
‥‥‥‥

そして，系列 $\{a_n\}$ は,

√2 = [{ 1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, 1414213, ‥‥ }]

に収束します。――実際，a_n の要素になる有理数列 { 1414‥, 1414‥, 1414‥, 1414‥, ‥‥ } は，√2 の要素になる有理数列 { 1.4, 1.41, 1414, 14142, 141421, ‥‥ } と限りなく近接していきます。これは，実数での系列の極限の定義から，$\{a_n\}$ の極限が √2 だということになります。

6.2 無理数

整数比 (分数) で表すことができない比 (倍関係) は ,「非比的」の意味で「irrational」と呼ばれます。翻って , 整数比 (分数) で表せる比 (倍関係) は ,「非比的 =irrational」に対立させて「比的 =rational」と呼ばれます。

ただし ,「irrational」,「rational」の日本語訳は , それぞれ「無理」,「有理」です。「有理数・無理数」のことばは , ここから出ています。

無理数については ,「代数的 (algebraic)」と「超越的 (transcendental)」の区分がされることも , 知っておいてください。

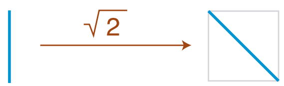
「代数的」とは , n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

の解になるものを言います。そして ,「超越的」とは「代数的」でないことです。

学校数学に出てくる重要な数では , 円周率 π , ネピア数 (自然対数の底) e が超越数です。

正方形の辺と対角線の長さの比 x は , 代数的無理数の $\sqrt{2}$ です：



この証明の仕方は , 中学数学で発展的に取り上げることのある内容ですので, ここで改めて確認しておくことにしましょう。

先ず , ピタゴラスの定理 (三平方の定理) より , $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ が成り立ちます。よって , x は $\sqrt{2}$ です。

さて , $\sqrt{2}$ が無理数でないとします――有理数 a/b (a, b は互いに素) であるとします。$(a/b)^2 = 2$ より ,$a^2 = 2 \times b^2$。よって , a は偶数。そこで , $a = 2 \times c$ とおくと , $(2 \times c)^2 = 2 \times b^2$, $2 \times c^2 = b^2$, よって b は偶数。これは ,「a, b は互いに素」に矛盾。よって , (背理法により) $\sqrt{2}$ は無理数でなければなりません。

6.3 平方根

ルートの記号は, 中学数学に出てきますが, 意外と正確に理解されていません。そこで, その意味 (用法) をここで改めて確認しておきましょう。

実数の世界では , 任意の正の数 n に対して ,「自乗すると n になる数」が存在し , かつ正と負の二つが存在します。このうち正の方を , $\sqrt{n}$ と書きます。すなわち ,

「自乗して n になる数のうち正の方」

という (長い) 言い回しを , スッキリ短くした表現がこれです：

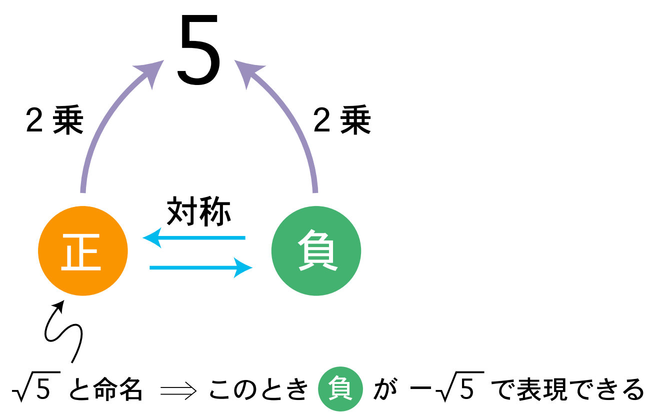
$$\sqrt{n}$$

「自乗して n になる数のうち負の方」は ,「自乗して n になる数のうち正の方」と対称です。したがってそれは ,

– (自乗して n になる数のうち正の方)

すなわち：

$$-\sqrt{n}$$



7. 複素数

　複素数は, 平面上のベクトルを「量」とする数です。複素数の「倍」は, 大きさの倍と回転でなっています。「任意の量は単位の何倍という形に一通りに表される」等,「量・数」の要件は「平面ベクトル・複素数」において貫徹されています。

　しかし, 複素数に対しては, 「イマジナリーな数」という感じが一般に持れています。現に高校数学での複素数の扱いは,

「$x^2 + 1 = 0$ のように実数解をもたない方程式も
解をもつようにするために人為的に導入した数」

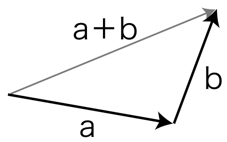
と学習者に思わせるようなふうになっています。「虚数」ということばも, わざわいしています。

　この章では, 複素数が明確な意味をもったさらに一つのリアルな数であることを示します。

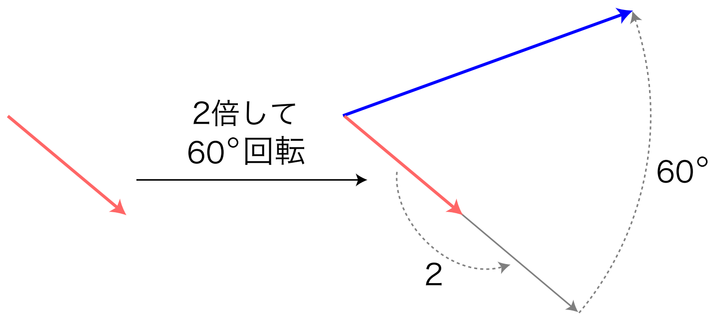
7.1 複素数倍

「数」とは「位・量・数」の形式におさまる「数」のことですが，この意味で，複素数は (これまで述べてきた自然数，分数，「正負の数」，実数とならぶ，もう一つの)「数」です。

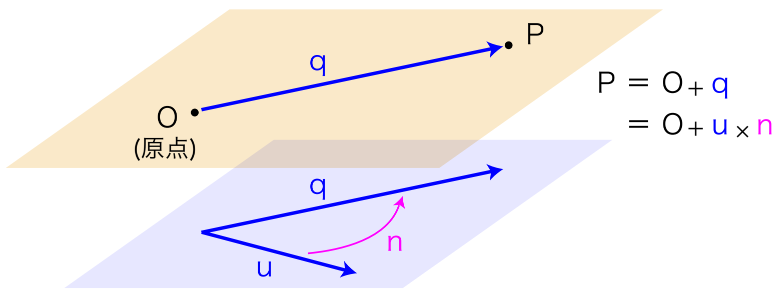
複素数が作用する「量」は , 一つの平面上の移動 / シフト (向きが 360 度自由なベクトル) です。この「量」では , ベクトルの和が , つぎのように定義されています :



ベクトルに対する複素数の「倍作用」は ,「倍して回転する」です (「倍」と「回転」で成っています) :



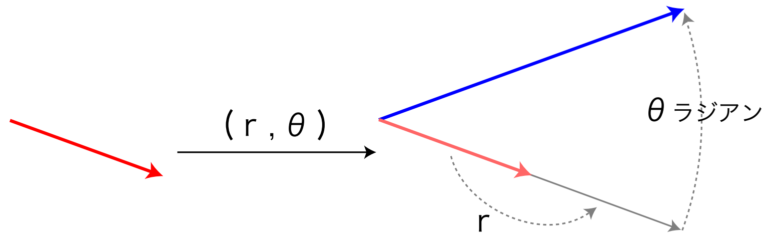
そしてこのときの「位」は，平面上の点になります。



7.2 複素数の表記 (2 タイプ)

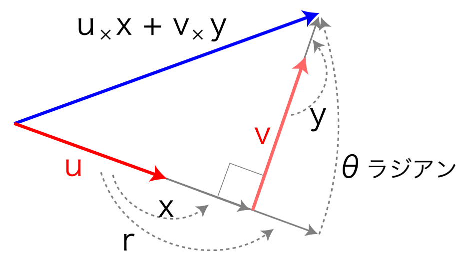
複素数は ,「倍して回転」の作用です。そこで複素数の表記は ,「r 倍して θ 回転」であれば (r, θ) と表記するのが , 直接的でわかりやすいでしょう。

ただし , (r, θ) を数の組にするために , θ を単位ラジアンに対する数値と定めます :

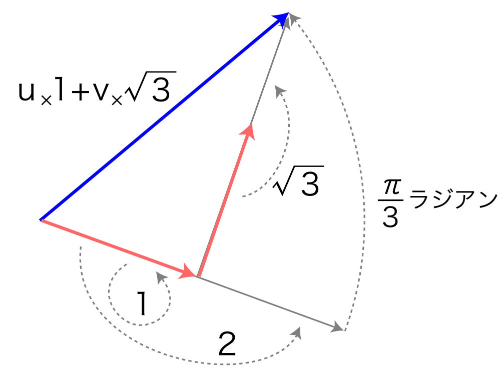


さらに ,(r, θ) の別表記を考えます。

もとのベクトル u の +90 ゜ 回転になるベクトルを v とします。このとき ,r, θ に対してつぎの関係を満たす x, y が決まります――逆に ,2 数 x, y に対しては , この関係を満たす r, θ が決まります :



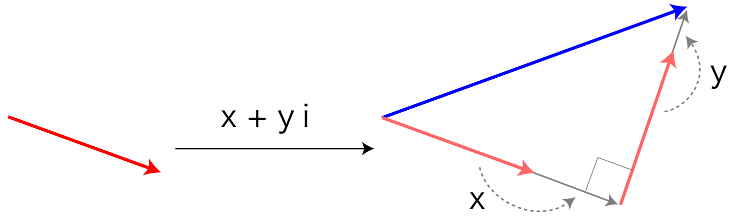
たとえば ,r = 2, $\theta = \pi/3$ には ,
x = 1, y = $\sqrt{3}$ が対応します :



実際 ,(r, θ) と (x, y) は , つぎの関係によって , 一方から他方が求まります :

$$(*)\quad \begin{aligned} x = r\cos\theta, &\quad y = r\sin\theta \\ r = (x^2 + y^2)^{1/2}, &\quad \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{aligned}$$

そこで ,(r, θ) と表現した複素数は , (x, y) でも表現できます。——実際に使っている表記は , x + y i です。



「x + y i」の表記を導入する理由は , 計算にあります。すなわち ,(r, θ) の表記は , 加法に不向きです。一方 , x + y i の表記は , 加法に適しています。また , 乗法には向いていませんが , 計算公式は立ちます。(§6.3.2)

「絶対値」「偏角」の用語についても，ここでおさえておきます。——複素数 z = (r, θ) に対し， r を z の絶対値と呼び , |z| で表します。また， θ を z の偏角 (argument) と呼び ,arg(z) で表します。

特に , z = x + yi に対し , 以下が成り立ちます (先の (*) の言い換え):

$$\begin{aligned} x = |z|\cos(\arg(z)), &\quad y = |z|\sin(\arg(z)) \\ |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}, &\quad \arg(z) = \tan^{-1}(y/x) \end{aligned}$$

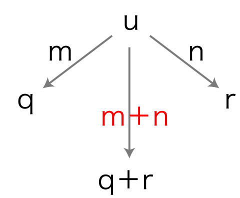
7.3 算法

和と積は数の要件ですが，複素数においてこれがどのように定まるかを，つぎに見ていきます。

7.3.1 和・加法

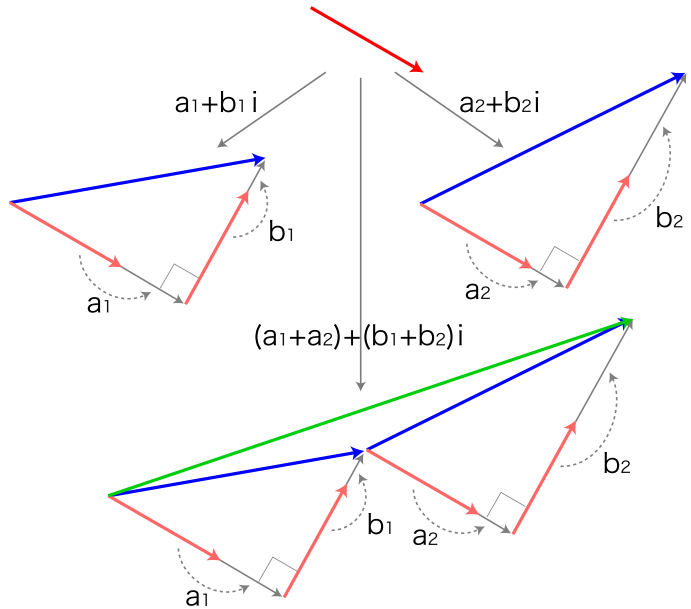
数の和は , 倍の和として決められます (§ 1.3.1)。
すなわち :

量 u の m 倍と n 倍をそれぞれ q, r とするとき ,
u に対する q + r の比を「m + n」で表す。



「+」の記号のこの用い方を実現する複素数の和は ,
どのように定義されるものになるでしょう？ つぎのようになります :

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$



和が定まることで，加法 (つぎの関数) も定まります：

$$(m, n) \longmapsto m + n$$

(「2 数にそれらの和を対応させる」)

複素数の学習意義

ほとんどのひとは , 複素数の実際使用と無縁でしょう。しかし , 数学学習の視点に立てば , 複素数の学習は重要です。「数と量」の学習という点で言えば， 複素数の学習まで進むことによって「数と量」の本質がよりはっきり見えてきます。

自然数 → 分数 → 正負の数 → 実数 → 複素数 , と学習を進めることは , 同時に ,「数と量」に対する特定の / 偏ったイメージ (固定観念) を順次壊していくことです。複素数まで進めば ,「数と量」の常識的なイメージが完壁に壊れます。そしてこれと裏返しに ,「数と量」の本質が見えてくるようになります。

複素数を (自然数 / 整数 , 分数 / 有理数 , 実数とあわせて)「数」と呼び , それが作用する対象をこれまで通り「量」と呼ぶとき ,「数」「量」には形式の意義しか残らない感じになります (数使用の構造 :「位・量・数」)。 実際 ,「数と量」の本質は , 形式です。

こういうわけで , 複素数の学習にまで進むことによって , つぎのことが理解されてくるようになります：

(1)「数」「量」とは (存在ではなく) 形式であること

(2) そこで逆に， その形式を有するものはすべて「数」「量」と呼ばねばならないこと

7.3.2 積・乗法

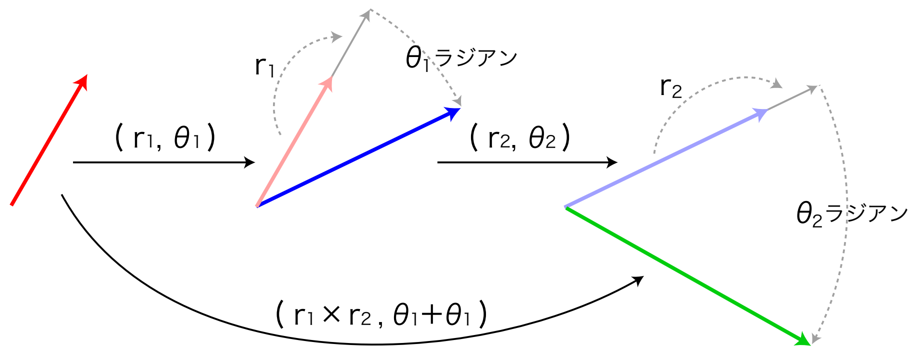
数の積は , 倍の合成 (倍の倍) として決められます (§ 1.3.2)。すなわち：

量 u の m 倍を q, そして q の n 倍を r とするとき , u に対する r の比を「m×n」で表す。

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & q \arrow[r, "n"] & r \end{tikzcd}$$

「×」の記号のこの用い方を実現する複素数の積は , どのように定義されるものになるでしょう？　つぎのようになります：

$$(r_1, \theta_1) \times (r_2, \theta_2) = (r_1 \times r_2, \theta_1 + \theta_2)$$



「x + yi」の表記では , 積の式はつぎのようになります (註):

$$(a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) = (a_1 \times a_2 - b_1 \times b_2) + (a_1 \times b_2 + b_1 \times a_2)\, i$$

積が定まることで，乗法 (つぎの関数) も定まります：

$$(m, n) \longmapsto m \times n$$

(「2 数にそれらの積を対応させる」)

(註) $a_1 + b_1 i = (r_1, \theta_1)$, $a_2 + b_2 i = (r_2, \theta_2)$ とすると , $(a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i)$ $= (r_1 \times r_2, \theta_1 + \theta_2)$。ここで ,$(r_1 \times r_2, \theta_1 + \theta_2) = x + y\, i$ とおくと ,

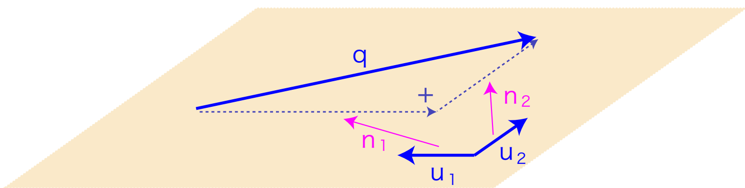
$$x = (r_1 \times r_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$= (r_1 \times r_2) (\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \times \sin\theta_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= (r_1 \cos\theta_1 \times r_2 \cos\theta_2) - (r_1 \sin\theta_1 \times r_2 \sin\theta_2) \\
&= (a_1 \times a_2) - (b_1 \times b_2) \\
y &= (r_1 \times r_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&= (r_1 \times r_2)\ (\sin\theta_1 \times \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \times \sin\theta_2) \\
&= (r_1 \sin\theta_1 \times r_2 \cos\theta_2) + (r_1 \cos\theta_1 \times r_2 \sin\theta_2) \\
&= (b_1 \times a_2) + (a_1 \times b_2)
\end{aligned}
$$

平面の次元

「点：0 次元，直線：1 次元」の延長で，「平面：2 次元」と言われます。この「2 次元」の意味は，つぎのようになります (§9.1)：

平面上のベクトル (移動 / シフト) の表現は , 単位 1 つではだめ。しかし , 向きの異なる 2 つのベクトルの組 (u_1, u_2) *を使えば , どのベクトルも* $u_1 \times n_1 + u_2 \times n_2$ $(n_1, n_2$ *: 実数) の形に一通りに表せる。*



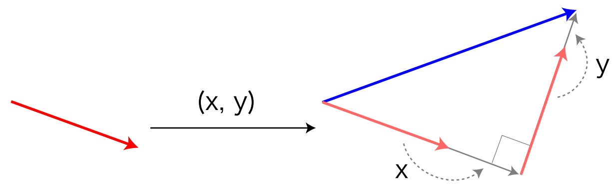
しかし，(実数ではなく) 複素数を使えば，0 でないベクトル u を単位と定め任意のベクトルを u の何倍という形に一通りに表せますから (§6.1) , 平面は「1 次元」ということになります (「平面は，複素数の作用に関して 1 次元」)。

7.4 実数の拡張

複素数の表記「a + b i」の先の導入 (複素数の表記 (2 タイプ)) は , 実は , 厳密性を欠いています。実際 ,「a + b i」に対してわたしたちは「a + b × i」の見方 (和と積への分解) をしますが , 先の定義では , これの説明がつきません。

複素数の定義から「a + b × i」の見方に進む間には ,「実数の拡張」のステップがあります。――以下，これを示します。

「6.2 複素数の表記 (2 タイプ)」で述べたつぎの複素数の作用に戻り , これを (x, y) と表現しましょう：



以下 , 実数の + , × に対し , 複素数の + , × を + , × で表すことにします。

先ず ,

(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),　(a, 0) × (b, 0) = (a × b, 0)

(0, 0) + (a, b) = (a, b)　((0, 0) は複素数の零元)

(1, 0) × (a, b) = (a, b)　((1, 0) は複素数の単位元)

が成り立つので , つぎのことが言えます：

- 複素数は実数の拡張で , 実数 a には複素数 (a, 0) が対応する。
- 実数の 0(零元), 1(単位元) には , 複素数の零元 , 単位元がそれぞれ対応する。

そこで，(a, 0) を単に a と書きます。

さらに i = (0, 1) とおくと , 複素数の表現「a + b i」が得られます：

(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) × (0, 1)= a + b × i

また ,「$i^2 = -1$」が得られます：

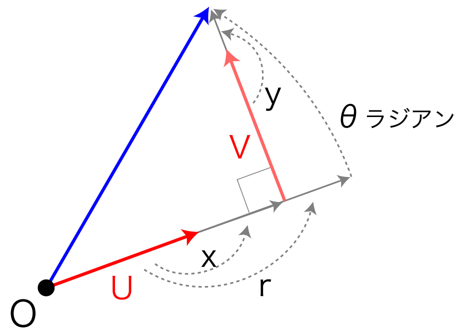
$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$

7.5 複素平面

「数直線」に準ずる方法で , 複素数を < 平面 > の上に配置することができます。——このときの平面を ,「複素平面」(あるいは「複素数平面」「ガウス (Gauss) 平面」) と言います。

方法は以下の通りです :

1. 平面上の任意の一点 O を , 原点と定める。
2. O を端点とする有向線分 U を , 任意に引く。
3. 各複素数 z = (r, θ) = x + yi に対し , つぎの操作で得られる有向線分の先端に「z」を印す :



ここで ,

・V は ,U を π/2 ラジアン回転して得られる有向線分。

・(r, θ) で操作しても (x, y) で操作しても , 結果は同じ。

Jump

「数・量」の形式

最後になりましたが，ここで「数・量」の形式を示します。

先ず,「量･数」とは，数の系 $(N, +, \times)$ に対するつぎの＜形式＞のことです:

$$(\ (N, +), \times, (N, +, \times)\ )$$

また，「位・量・数」は，つぎの＜形式＞のことです：

$$(\ N, +, (N, +), \times, (N, +, \times)\ )$$

特に，一つの数の系が一つの量 (形式) および位 (形式) を定めることになります。──量 (形式)・位 (形式) は，数の系の個数だけあります。

自然数	$(\mathbb{N},+,\times)$	$\longrightarrow$	$(\mathbb{N},+,(\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$
整数	$(\mathbb{Z},+,\times)$	$\longrightarrow$	$(\mathbb{Z},+,(\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$
有理数	$(\mathbb{Q},+,\times)$	$\longrightarrow$	$(\mathbb{Q},+,(\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$
実数	$(\mathbb{R},+,\times)$	$\longrightarrow$	$(\mathbb{R},+,(\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
複素数	$(\mathbb{C},+,\times)$	$\longrightarrow$	$(\mathbb{C},+,(\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

よって,「数」の形式が, 本質的な問題として残ります。(自然数, 整数, 有理数, 実数，複素数等いろいろな数の系が「数」の名で一つに括られるのは , これらに同じ形が見られているからです。この形を，いま問題にしています。)

「数」の範疇を拡げるほど ,「数」の条件は弱まります。例えば , 複素数を考えることで , 順序関係は「数」の条件でなくなります。四元数を考えることで , 乗法の可換性は「数」の条件でなくなります。さらに八元数までいくと，乗法の結合性が「数」の条件でなくなります。

何が「数」の条件として最後に残るでしょう。最後まで保持されねばならないのは , 量の単位を実現するものとして，単位元が「数」にあること (これは量表現の要件) と，量の倍の倍および量の和にそれぞれ「数」の積および和を対応させられること (これは量計算の要件) です。

とはいっても，実用性を考えれば，(自然数から四元数までの数で成り立っているところの) 以下の条件の充足が最低限の要件になりそうです：

1°　＋は結合的かつ可換 .

2°　× は結合的で , 単位元 $1 \in N^*$ が存在する .

3°　＋と × の間に左右分配法則が成り立つ :

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$
$$(a+b)\times c = a\times c + b\times c$$

4°　各要素は , + に関して可約 ; 即ち ,

$$a+b = a+c \quad \Longrightarrow \quad b = c$$

5°　N^* の各要素は , × に関して左右可約 ; 即ち ,$a \in N^*$ に対し ,

$$a\times b = a\times c \qquad b = c$$
$$b\times a = c\times a \qquad b = c$$

6°　任意の要素 a, b に対し , 要素 c で , a ＋ c ＝ b か a ＝ b ＋ c となるものが存在する .

ここで N^* は , N が零元 0 をもつときは $N\backslash\{0\}$ (註), そうでないときは N 自身。

$(N, +)$ が群のとき , 4° はこれに含意されます。また $(N^*, \times)$ が群のとき , 5° はこれに含意されます。また ,× が可換のとき , 3° の条件式は第一式のみでよいことになります。

(註)　一般に , 集合 X とその部分集合 Y に対し ,Y に属さない X の要素全体の集合を X\Y で表わします。

あとがき

「数と量」のはなしは ,「数」という道具のはなしです。数の解説は , 道具の解説として進みます : 用途一般を示し , そして「扱う対象が色々なので , 道具は各種用意されている」ことを示します。

各種数には , 常備的なもの (自然数), かなり趣味的なもの (実数), すべての機能の拡張になっているかわりにすごく重くなっているもの (複素数) など特徴がありますが , これも道具一般に認められることです。

道具のはなしでは ,「本来的用途」を論じるときの < ワンパターン > と ,「扱う対象に応ずる」を論じるときの < バラエティ > が , 交互に現れます。このようなストーリーの学習では ,< ワンパターン > を意識し , 見失わず , そして確実に理解することが肝要です。実際 ,< バラエティ > の方も ,< ワンパターン > の理解が深まるように学習できていれば成功です。

本書の「数と量」のはなしには , つぎのような < ワンパターン > があります :
「数の機能は 2 量間の倍関係の表現」「位・量・数」「+ は倍の和と整合させ, × は倍の合成と整合させる」。

この < ワンパターン > についての理解にいま自信があれば , あなたの学習は成功です。もし , そうでなければ , どうか再度本書を読み直してください。

本書は, できるだけ具体的な数･量を用いて解説するようにしました。それは, 読者として, 数学の厳格な論の展開の仕方や, 記号を多用した一般的で簡潔な記述の仕方に, あまり馴れていない人を想定したためです。

また, 数学の文章を読むことはとにかく疲労しますので, 「読みやすさ」を第一に考え, できるだけ簡明にそしてスリムに編集することを心掛けました。そのため, 割愛した内容が多くあります。それらは著者のつぎのウェブサイトにありますので, アクセスしてみてください :

http://m-ac.jp/me/

更新履歴

2007-06-03
　タイトル変更
2010-01-28
　「小数」を一章に
2010-12-19
　後半部分の「比例関係」「量測定・量計算」「線型代数」の章を切り離す。
　切り離した分は, 以下のテクストに組み入れる :
　　『量計算の論理』
　　『量と線型空間の近さと違い』(準備中)
　　『学校数学は mを「1 m」と言わせる』(準備中)

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。所属学会：日本数学教育学会

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための

「数」がわかる本 数学編 (2)

いろいろな数がつくられるしくみ

2004-11-04　初版アップロード (サーバー：m.iwa.hokkyodai.ac.jp)
2010-05-28　サーバー変更 (m-ac.jp)
2010-12-19　後半部分の「比例関係」「量測定・量計算」「線形代数」の章を切り離す

著者・サーバ運営　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

---

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp