現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「数」がわかる本 シリーズ

図解

数学編（1）

「数とは何か？」への答え

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」がわかる本 数学編 (1)

「数とは何か？」への答え

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「数とは何か？」への答え』を PDF 文書の形に改めたものです。

本テクストについて

本テクストは, 数学の数の意味を述べようとするものであり,「数学の数」の総論である。
この総論は各論と相伴う必要があるが, 各論として既につぎのテクストを作成している：

『いろいろな数がつくられるしくみ』
『いろいろな数が「数」であること』
『四元数』
『量計算の論理』

この４テクストは, 本テクストの内容をベースにしていることになる。

本テクストは, 総論であるために,《例をともなわせながら読む》ができなければ「*何を言っているのかさっぱりわからない！*」になってしまう。そこでこの内容にすぐに入っていけない読者は, つぎのように本テクストを用いられたい。

すなわち, 最初に本テクストを一通り読んで, 論のだいたいの方向性をつかむ。 ——だいたいの雰囲気をつかむといった程度でかまわない。
それから, 上の４本のテクストを読む。
ただし,『四元数』は, 数学の専門性をかなり要するので, 読みにくければ, とばしてよい。
各テクストに, 本テクストの内容がある。そこで, 適宜本テクストを参照するようにする。
そして最後に, 本テクストに還ってくる。
今度は, 本テクストが読めるはずである。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

自然数の積，分数の積，正負の数の積，複素数の積は，求積のアルゴリズムが異なる。しかも，ひどく異なる。
ひどく異なるのに，なぜひとしく「積」なのか？

このことは，「数」の意味，「量」の意味に考えを及ぼしてはじめてわかることである。
しかし，これを行うのは簡単でない。
そこでたいていは，自然数の積を扱えれば「積」がわかっているということにしてしまう。そして，「積」の数学の道を自ら閉じる。

ここで「積」は，一例として挙げているに過ぎない。
「数」に伴ういろいろな主題がこんな具合である。
そこで本テクストを以て，「数」の意味 ,「量」の意味に考えを及ぼすことを行う。

論述は，できるだけ短く簡単であることに努める。
不足を埋めることより，論の見通しをよくすることを優先しようとするためである。

「数*とは何か？*」への答えがどのようになるかも，テクストを読みやすいように，はじめに述べておこう。
「数とは何か？」への答えとして本テクストで示すものは，数学の答えである。そして「数は量の比」が，数学の答えである。

「数は量の比」が答えであり，そしてこれが数学の答えであることは，特に学校数学を考えるとき，強調されねばならない。というのも，学校数学は「数は量の比」ではないからである。 ——学校数学は「数は量の抽象」である。

歴史的経緯から学校数学は「数は量の抽象」になった。この歴史的経緯は数学とは別の問題であるので，＜「数とは何か？」への数学の答え＞論に混在させないよう注意しなければならない。
学校数学の「数は量の抽象」については以下のテクストで論じているので，参照されたい：

『数は量の比——「数は量の抽象」ではない』
『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』

1　数・量の構造

1.1　数の構造：(N, ＋ , ×)

1.2　量の構造：((Q , **+**), × , (N, ＋ , ×))

1.1　数の構造：(N, ＋ , ×)

「自然数」のことばは，１，２，３，･･･ の個々の数を指すのにも，これら全体で成る集合を指すのにも，用いられる。
集合の方を「自然数 (集合)」と呼ぶとしよう。これは，ℕ で表わされる。
個々の数は ℕ の要素ということになったので，これを「自然数 (要素)」と呼ぶとしよう。

自然数では「和」と「積」が考えられている。すなわち，自然数 (集合) ℕ には，内算法である加法＋と乗法 × が考えられている。
自然数がこのように自然数 (集合) ℕ と加法＋と乗法 × を構成要素とする系──「自然数 (系)」──であるということを，(ℕ，＋ , ×) で表すことにする。

以上「自然数」について，これの系を表現した。しかし，この表現を導いてきた論法は，他の数 (「整数」「有理数」「複素数」･･･) でも同じになる。
そこで一般に，「数」が系，集合，要素のいずれを指すかでそれぞれ「数 (系)」「数 (集合)」「数 (要素)」の言い回しを用いることにし，そしてつぎを数 (系) の表現とする：

(N, ＋ , ×)

N ：母体としての集合
＋：加法
＋：乗法

1.2　量の構造：((Q , **＋**), **×**, (N, ＋ , ×))

「数」を構造で表現したように，「量」の構造をとらえこれを表現するとしよう。

「長さ」では, (「3cm の長さ」のように) 個々の長さが考えられている。
この個々の長さ全体の集合を考え，Qで表す。
個々の長さはQの要素ということになったので，これを「長さ (要素)」と言い表す。一方，Qの方を「長さ (集合)」と言い表す。

２つの長さ (要素) の間には，比が考えられている。そして，この比の表現に用いることになるのが，数である。
長さに伴う数が (N, ＋ , ×) であるとしよう。

註：長さの場合，Nは通常実数 ℝ を考えることになる。

「比」の別表現に「倍」がある。この二つの表現は，q，q ' ∈ Q と n ∈ N に対するつぎの＜言い換え＞の関係にある：

「q とq ´ の比はn」 ⇄ 「q の n 倍はq ´」

この倍を, Qの要素に対するNの要素の作用 (外算法) と解釈し, 記号「**×**」で表す。すなわち，「q の n 倍」を q **×** n で表す。

註： 数の「×」と区別されるよう,「**×**」は下付けで太字の小さい「×」である。

ここまでで，長さは，長さ (集合) Q と数 (N, ＋ , ×) と倍作用 **×** を構成要素とする系ということになった 。この系──「長さ (系)」──

をつぎのように表すとしよう：

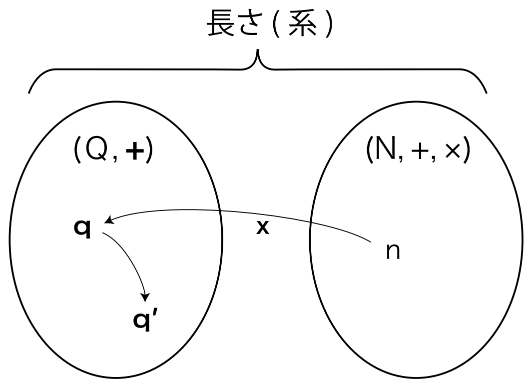
(Q , × , (N, ＋ , ×))

ところで，長さでは「和」が考えられている。すなわち，長さ (集合) Qには，内算法である加法が考えられている。
この加法を，記号「**+**」で表す。

註：　数の「＋」と区別されるよう,「**+**」は太字の「＋」である。

こうして，長さ (系) は，最終的につぎの構成になった：

((Q , **+**), × , (N, ＋ , ×))



以上「長さ」について，これの系としての構成を示した。しかし，この構成を導いてきた論法は，他の量（「重さ」「時間」「速さ」・・・・）でも同じになる。
そこで一般に,「量」が系，集合，要素のいずれを指すかでそれぞれ「量 (系)」「量 (集合)」「量 (要素)」の言い回しを用いることにし，そしてつぎを量 (系) の表現とする：

((Q , **+**), × , (N, ＋ , ×))

Q：母体としての集合
+：Q の内算法の加法
×：Q の要素に対する数 N の要素の倍作用

2　数の道具性

2.1　数の道具的意味 :「量の倍 / 比」

2.2「等倍」を意味とする $1 \in N$ の存在 :
$q \in Q$ に対し $q \times 1 = q$

2.3「単位」を意味とする $u \in Q$ の存在 :
$q \in Q$ が $u \times n$, $n \in N$ の形に一意表現される

2.4　$(q \times m) \times n = q \times (m \times n)$

2.5　$q \times m + q \times n = q \times (m + n)$

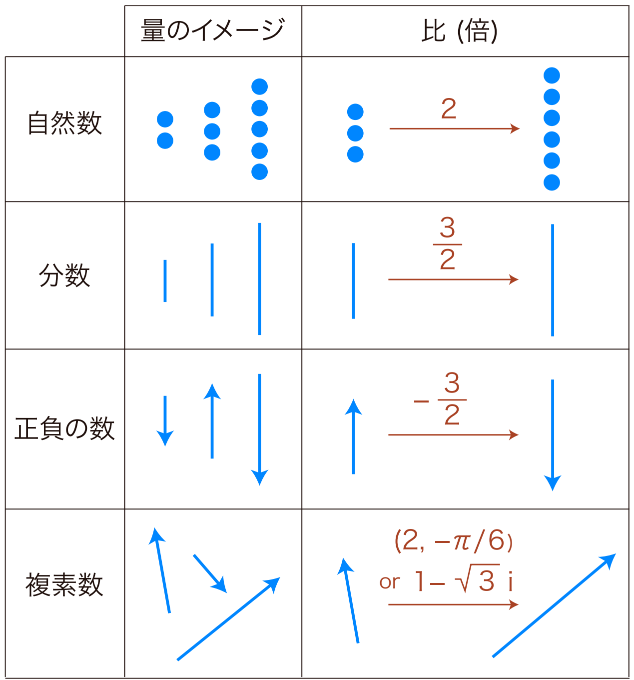
2.1　数の道具的意味：「量の倍 / 比」

量 ((Q , **＋**), **×** , (N, ＋ , ×)) の「**×**」は，Q の要素に対する数 N の要素の作用であり，「倍」をこれの意味に考えている。
すなわち，量 **q** , **q**´ ∈Q と数 n ∈N の間の倍関係

$$\mathbf{q} \times n = \mathbf{q}'$$

を，「**q** の n 倍が **q**´ 」と読む。
またこの倍関係に対しては，「**q** と **q**´ の比は n」の読み方をする。

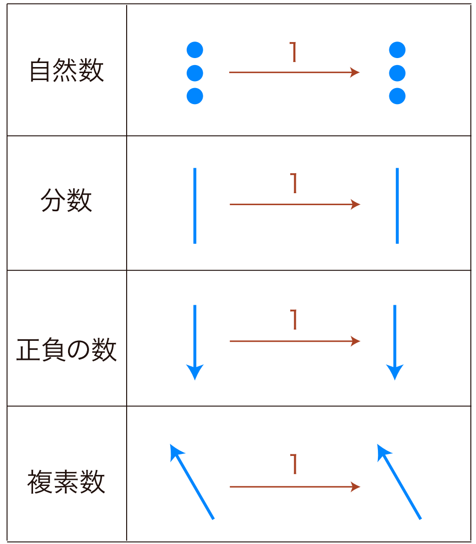
これは，「2 量の倍 / 比」が数の道具的意味になっているということである。



2.2「等倍」を意味とする 1∈N の存在： **q**∈Q に対し **q** × 1 = **q**

量 ((Q , **＋**), **×** , (N, ＋ , ×)) において，N の要素は「2 量の比」を意味とする。
この「2 量の比」の一つに，特に「等倍」を考える。
すなわち，N の要素 1 で，つぎの条件を満たすものを考える：

$$\text{任意の } \mathbf{q} \in Q \text{ に対し，} \mathbf{q} \times 1 = \mathbf{q}$$

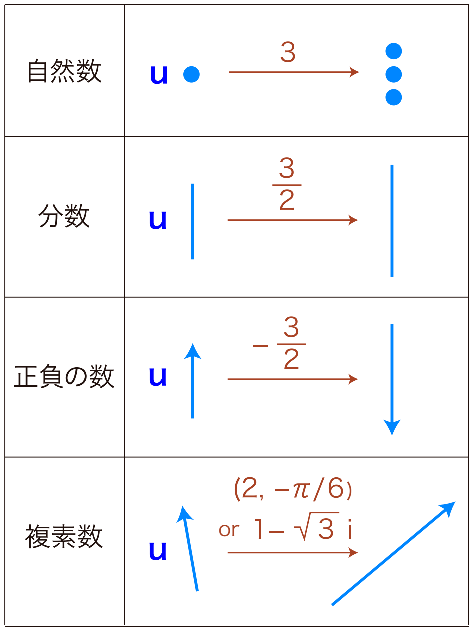


2.3「単位」を意味とする $\mathbf{u}\in Q$ の存在：$\mathbf{q}\in Q$ が $\mathbf{u}_{\times} n$, $n\in N$ の形に一意表現される

「量」の概念には，「測定」が含意としてある。
「測定」の意味の内容になるものは，つぎの条件である：

> $((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ においては，つぎの条件を満たす $\mathbf{u}\in Q$ が存在する：
>
> 任意の $\mathbf{q}\in Q$ に対し，$\mathbf{q} = \mathbf{u}_{\times} n$ となる $n\in N$ が一意的に存在する。

実際，$\mathbf{u}$ が「単位」と呼ばれるものになる。

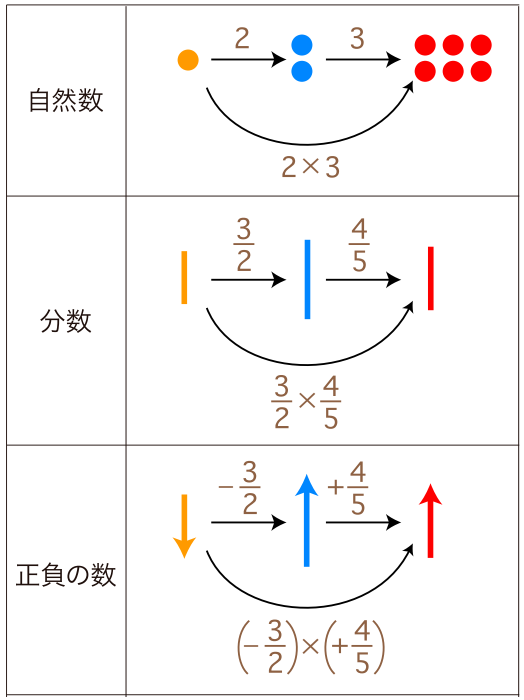


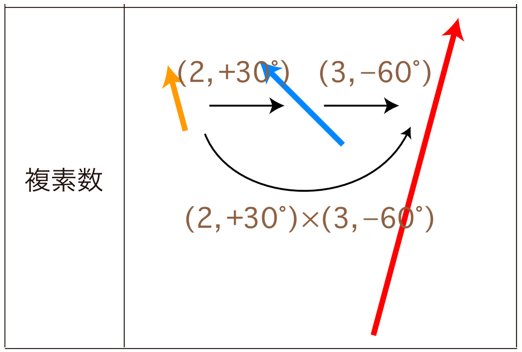
2.4　$(\mathbf{q}_{\times} m)_{\times} n = \mathbf{q}_{\times}(m \times n)$

「量」の概念では，$((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ における ${}_{\times}$ と N の乗法 $\times$ がつぎのように関係することが，含意になっている：

$$(\mathbf{q}_{\times} m)_{\times} n = \mathbf{q}_{\times}(m \times n)$$

$$\begin{tikzcd} q \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & q' \arrow[r, "n"] & q'' \end{tikzcd}$$





自然数，分数，‥‥ それぞれの数における求積アルゴリズムは，この関係を成り立たせるものとして導かれる。——このとき，各数の求積アルゴリズムは，互いに著しく違ったものになる。

例：

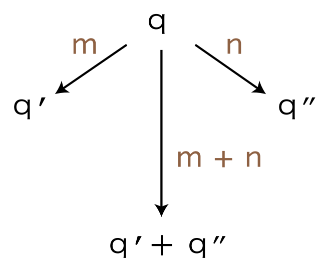
分数　：　$\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'} = \frac{m\times m'}{n\times n'}$

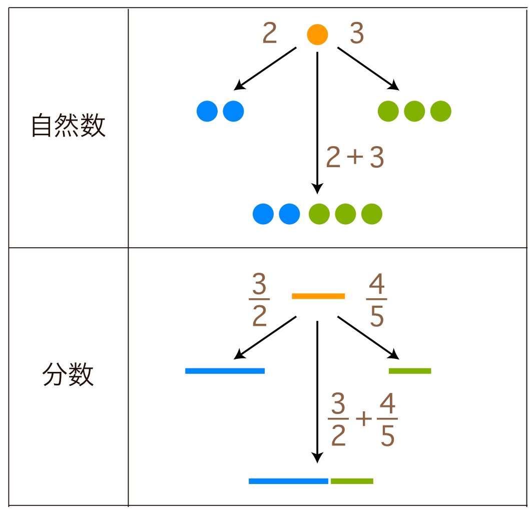
複素数：　$(r, \theta)\times(r', \theta') = (r\times r', \theta+\theta')$

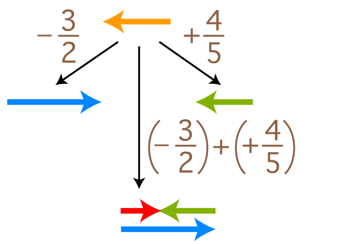
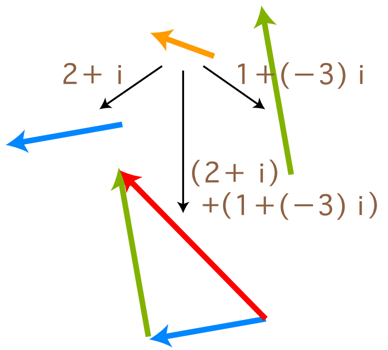
2.5　$q_\times m + q_\times n = q_\times (m+n)$

「量」の概念では，((Q , **+**), $_\times$, (N, + , ×)) における $_\times$ と N の加法＋がつぎのように関係することが，含意になっている：

$$q_\times m + q_\times n = q_\times (m+n)$$





正負の数	
複素数	

自然数，分数，・・・・ それぞれの数における求和アルゴリズムは，この関係を成り立たせるものとして導かれる。――このとき，各数の求和アルゴリズムは，互いに著しく違ったものになる。

例：

分数　： $\dfrac{m}{n}+\dfrac{m'}{n'}=\dfrac{m\times n'+m'\times n}{n\times n'}$

複素数：$(m+n\,i)+(m'+n'\,i)=(m+m')+(n+n')\,i$

3　数の道具性から導かれる「数」の条件

3.1　単位元 1 の存在

量 ((Q , $\boldsymbol{+}$), $\boldsymbol{\times}$, (N, ＋ , ×)) において, 「等倍」を意味とする 1 ∈N は, Nの乗法 × に関する単位元になる。
すなわち, 任意の n ∈N に対し, $n \times 1 = 1 \times n = n$ が成り立つ：

Qの単位 u に対し,

$$\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times 1) = (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} 1 = \mathbf{u} \boldsymbol{\times} n$$

これより, $n \times 1 = n$

また,

$$\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (1 \times n) = (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} 1) \boldsymbol{\times} n = \mathbf{u} \boldsymbol{\times} n$$

これより, $1 \times n = n$

3.2　積に結合法則が成り立つ

Nの × に結合法則が成り立つ：

a , b , c∈N と Qの単位 **u** に対し,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \boldsymbol{\times} ((a \times b) \times c) \\
&= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a \times b)) \boldsymbol{\times} c \\
&= ((\mathbf{u} \boldsymbol{\times} a) \boldsymbol{\times} b) \boldsymbol{\times} c \\
&= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} a) \boldsymbol{\times} (b \times c) \\
&= \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a \times (b \times c))
\end{aligned}$$

これより, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

3.3　左分配法則が成り立つ

Nの＋と × の間に，左分配法則 $n \times (a+b) = n \times a + n \times b$ が成り立つ：

　　a，b，$n \in N$ と Qの単位 **u** に対し，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times (a+b)) \\
&= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} (a+b) \\
&= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} a \mathbin{\boldsymbol{+}} (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} n) \boldsymbol{\times} b \\
&= \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times a) \mathbin{\boldsymbol{+}} \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times b) \\
&= \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (n \times a + n \times b)
\end{aligned}
$$

　　これより，$n \times (a+b) = n \times a + n \times b$

本論考の捉える「数の道具性」は，右分配法則 $(a+b) \times n = a \times n + b \times n$ を含意しない。──すなわち，つぎの３段目から４段目への変形がこれの含意にならない：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} \boldsymbol{\times} ((a+b) \times n) \\
&= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a+b)) \boldsymbol{\times} n \\
&= (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} a \mathbin{\boldsymbol{+}} \mathbf{u} \boldsymbol{\times} b) \boldsymbol{\times} n \\
&= ((\mathbf{u} \boldsymbol{\times} a) \boldsymbol{\times} n \mathbin{\boldsymbol{+}} (\mathbf{u} \boldsymbol{\times} b) \boldsymbol{\times} n \\
&= \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a \times n) \mathbin{\boldsymbol{+}} \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (b \times n) \\
&= \mathbf{u} \boldsymbol{\times} (a \times n + b \times n)
\end{aligned}
$$

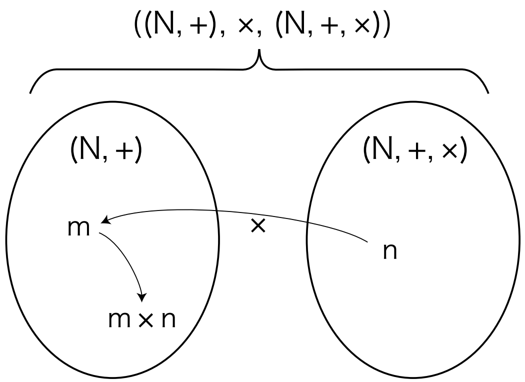
もっとも，現前の「数」である自然数，整数，有理数，実数，複素数，四元数，八元数，十六元数 (後述) は，四元数までが分配法則の成り立つものになっている。また八元数 ，十六元数は，× が結合的でなく＜量をもたない数＞ということになるので，数の道具性の規定をさらにこの２つの数に引き寄せて調整するというふうにはならない。

4　量形式 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

4.1　量 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

数 (N, ＋ , ×) から，Ｎに加法のみを考えた系 (Ｎ , ＋) を導く。そして，(Ｎ , ＋) の要素に対する (N, ＋ , ×) の要素の倍作用を，積 × で定義する。

このとき，系 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) は，量の構造をもつ。すなわち，量である。



4.2　量の普遍対象 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×))

((Q , $\mathbf{+}$), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) に対し，写像 f ：Q ―→ N を

$$f\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,n\,) = n \qquad (\,n \in N\,)$$

で定義する。

ｆは，QとNの間の１対１対応になる。

さらに，つぎが成り立つ（註）：

$$f\,(\,\mathbf{x} \mathbf{+} \mathbf{y}\,) = f\,(\,\mathbf{x}\,) + f\,(\,\mathbf{y}\,) \qquad (\,\mathbf{x}\,,\ \mathbf{y} \in Q\,)$$

$$f\,(\,\mathbf{x}\,_{\times}\,n\,) = f\,(\,\mathbf{x}\,) \times n \qquad (\,\mathbf{x} \in Q\,,\ n \in N\,)$$

これは，((Q , $\mathbf{+}$), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) が ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) と同型であることを示す。

翻って，つぎが「量」の定義になる：

> 数 (N, ＋ , ×) に対し，((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) と同型な系 ((Q , $\mathbf{+}$), $_{\times}$, (N, ＋ , ×)) を，(数 (N, ＋ , ×) に対する) 量と呼ぶ。

特に，((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) は，「数 (N, ＋ , ×) に対する量」の普遍対象ということになる。

註：$f\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,m \mathbf{+} \mathbf{u}\,_{\times}\,n\,) = m + n$

$= f\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,m\,) + f\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,n\,)$

$f\,(\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,m\,) \times n\,) = f\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,(\,m \times n\,)\,) = m \times n$

$= f\,(\,\mathbf{u}\,_{\times}\,m\,) \times n$

4.3　量の存在論

数学では，量は形式になる。そして，この形式は数を用いて表現される。
この意味で，数が量という存在をつくる。

数と量の関係については，つぎの唯物論の考え方がある：
　「*リアルな量が先ずあり，これを抽象して数が得られる。*」
学校数学の「数と量」の扱いは，これに近い。

唯物論の土俵で数から量か？量から数か？の論をやり出すと，これは哲学で延々とやられてきた「コトバとモノ」の存在論になる。
本テクストは，この土俵にはのぼらない。
実際，のぼることは無用である。「数と量」の数学が，そもそも唯物論を含め存在論から導かれるものではないからである。

「数と量」の数学がリアルへ適用して得たい結果をもたらすものになっているのは，これが存在の反映ないし抽象だからではない。リアルへ適用して得たい結果をもたらすように，つくられているからである。
包丁で肉を切れるのは，包丁が肉の反映ないし抽象だからではない。肉を切れるものとしてつくっているからである。

量にしても，リアルの側にあるのではない。
例えば，「速さ」はリアルの側にあるのではない。「速さ」の場合，リアルの側に措かれるものは，一瞬に目の前を通過する新幹線とか，地面を這っているミミズとかである。新幹線やミミズが，包丁を使って肉を切るときの肉である。そして「速さ」が，包丁である。

5　現前の「数」

5.1　自然数から四元数まで

数 (N, ＋ , ×) からは，量の普遍対象 ((N, ＋), ×, (N, ＋ , ×)) が定義される。
特に，<u>数のいろいろ（自然数，整数，有理数，‥‥）に量のいろいろが応じる</u>ことになる。
こうして，量より先に数があることになり，「数」の意味 (定義) が問題になってくる。

「数」の意味を考えるために, 実際にどんなものを「数」と呼んでいるかを, 先ず押さえておこう。

現前の数 (系) は，四元数までの構築の流れがつぎのようになっている:

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \\
 & & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
 & & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}
$$

これらは，量 (系) をつぎのカテゴリー区分で対象化するものになっている：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times))$	$((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$

((ℕ, ＋), ×, (ℕ , ＋ , ×)) の離散と (($\mathbb{Q}^+$, ＋), ×, ($\mathbb{Q}^+$, ＋ , ×)) の順序稠密の違いは，前者では２量で比をもてないものが出てくるのに対し，後者ではどの２量も比が一意的に定まるという違いとも，相応じている。

「大きさとｎ次元方向・完備」のカテゴリーの量 ((Q , $\mathbf{+}$), $\mathbf{\times}$, (N, ＋ , ×)) として数学の中で実際に対象にされるものは，ｎ次元実ベクトル空間を母体にして構成したつぎのものである：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ			
	大きさと１次元方向			$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{R}^2,\mathbf{+}),\mathbf{\times},(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{R}^4,\mathbf{+}),\mathbf{\times},(\mathbb{H},+,\times))$

ここで，(($\mathbb{R}^2$, ＋), ×, (ℂ, ＋ , ×)) と ((ℂ , ＋), ×, (ℂ, ＋ , ×)) の同型:
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$　は，つぎの対応である：

$$(x, y) \longleftrightarrow x + yi$$

また，(($\mathbb{R}^4$, ＋), ×, ($\mathbb{H}$, ＋, ×)) と (($\mathbb{H}$, ＋), ×, ($\mathbb{H}$, ＋, ×)) の同型: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}$ は，つぎの対応である：

$$(x , y , z , w) \longleftrightarrow x + y i + z j + w k$$

複素数の実用性は，つぎの点にある：

「２次元実ベクトルの＜比＞になる数」は，つくることができて，
それは複素数である。

四元数の実用性は，つぎの点にある：

「３次元実ベクトルの＜比＞になる数」は，つくることができて，
それは四元数である。

ただし,「３次元実ベクトルの＜比＞になる数」をつくるとき, それは「４次元実ベクトルの＜比＞になる数」をつくることになって，そしてその数は四元数だということになる。
３次元実ベクトルは，４次元実ベクトル空間に埋め込むことで，四元数を＜比＞として用いられるようになる。

解説：
二つの３次元実ベクトルに対しては，一方のベクトルを２重に回転して大きさを倍することで，他方のベクトルに重ねることができる。
さて，これが＜数の倍作用＞として表されるようなそんな数は，つくることができないか？
この数は実際につくることができる──ただし４次元実ベクトルに対し倍の作用をする数としてつくられることになる。これが四元数である。

３次元実ベクトルを４次元実ベクトル空間に埋め込み，これを四元数倍すると，結果は３次元実ベクトルになる。そして，＜２重に回転して大きさを倍する＞の結果と同じになる。倍の倍も，四元数の積として計算できる。 よって，「*四元数が＜求めていた数＞である！*」となる。

四元数になると，乗法が可換でなくなる。 ──これは，これは四元数の「数」としての著しい特徴になる。
(四元数については，つぎのテクストにあたられたい：『四元数』)

5.2　四元数より後の数

四元数以降の「数」で現前のものは，八元数，十六元数となっている。

八元数は，四元数にケーリー＝ディクソンの構成法を適用してつくられ，四元数の拡張になる。
四元数の拡張ということから，特に，乗法は可換でない。
そして，この八元数になると，乗法が結合的でなくなる。――これは八元数の「数」としての著しい特徴になる。

十六元数は，八元数にケーリー＝ディクソンの構成法を適用してつくられる。そして，乗法は可換でなくそして結合的でない。

ところで，数の道具性（実際性）は，《量の対象化と量の表現・計算に使われる》というものである。そしてこの道具性の実現を「数」の条件にするとき，この条件には「乗法の結合性」が含まれてきた（→ §3.2 積に結合法則が成り立つ）。
翻って，この条件を満たさない数は，＜量をもたない数＞である。
そして，八元数，十六進数は，＜量をもたない数＞だということになる。

6「数」の意味

6.1「数」の意味のシフト

「数」と呼ばれているものを,

自然数 → 整数 → 有理数 → 実数 → 複素数 → 四元数
→ 八元数 → 十六進数

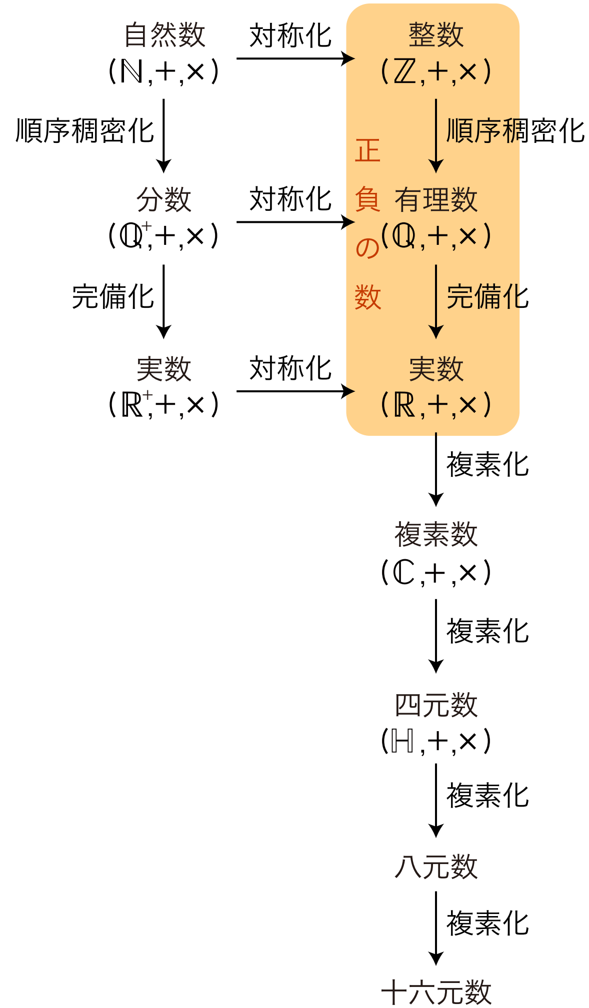
と追っていくと, 「数」の意味として一貫して残るものが無くなる。
どうしてこうなるかというと, 新しい「数」をつくっていくやり方が,「直近の改造」だからである。
隣り同士は似ているが, 隔たるにしたがい別物になっていく。

・自然数 → 分数 (有理数) は, 順序稠密化である。
・有理数 → 実数 は, 完備化である。
・実数 → 複素数 は, 倍作用の対象にしている実ベクトルの次元を１から２に上げるものである。
・複素数 → 四元数 は, 倍作用の対象にしている実ベクトルの次元を２から３ (結果的に４) に上げるものである。
また一面では, 複素数の「複素」形式の拡張である。
・四元数 → 八元数 → 十六進数 は, 純粋に「複素」形式の拡張である。

四元数までは＜量をもつ数＞であり, 八元数からは＜量をもたない数＞である。

数学は, 実数, 複素数, 四元数から定義される量形式

$$((\mathbb{R}, +), \times, (\mathbb{R}, +, \times))$$
$$((\mathbb{C}, +), \times, (\mathbb{C}, +, \times))$$



$$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$$

をもつ量として，それぞれ

$$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$$
$$((\mathbb{R}^2,+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$$
$$((\mathbb{R}^4,+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$$

を取り上げる。

これらは，線型空間論の実線型空間から材料をとってきている。

特に，$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$ は，「量」と「線型空間」の両方の見方ができる。

量論

線型空間論

実線型空間

$$\begin{tikzcd}
((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times)) \arrow[r] \arrow[d] & ((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times)) \arrow[d] & & \\
((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times)) \arrow[r] \arrow[d] & ((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times)) \arrow[d] & & \\
((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times)) \arrow[r] & ((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & ((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[r, equal] \arrow[d] & ((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
 & ((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dd] & (\boxed{(\mathbb{R}^2,+)},\times,(\mathbb{C},+,\times)) \arrow[dd] & (\boxed{(\mathbb{R}^2,+)},\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[l, bend right] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
 & & & ((\mathbb{R}^3,+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
 & ((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (\boxed{(\mathbb{R}^4,+)},\times,(\mathbb{H},+,\times)) & (\boxed{(\mathbb{R}^4,+)},\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}$$

6.2「数とは何か？」への答え

「数」の意味を

自然数 → 整数 → 有理数 → 実数 → 複素数 → 四元数
→ 八元数 → 十六進数

で追っていくと,「数」の意味として一貫して残るものが無くなる。すべてに通底する意味を取り出しても,「数」の意味といえるほどのものにならない。

現前の数に「数」の意味を追っていくときに一貫した意味が残らないのは, 数導入の方法論がシフトしたり複線化したりするからである。
方法論がシフト・複線化することで,「数」に一貫した意味というものが残らない。特に,「数」は形式のことばでを定義するものにはならない。

数導入の方法論のシフト・複線化は, つぎのようである：

A. 方向をもつ量の概念を立て, 方向を １次元 →２次元 → ３次元 と上げようとすると, 正負の数 → 複素数 → 四元数 が応じる。
B. 量の概念を 離散 → 順序稠密 → 完備 と拡張しようとすると, 自然数 → 分数 → 実数 が応じる。
C. 実ベクトルを量にして, 実ベクトルの次元を １次元 →２次元 → ３次元 と上げようとすると, 実数 → 複素数 → 四元数 が応じる。
D. 複素数の「複素」形式を拡張しようとすると, 複素数 → 八元数 → 十六元数 が応じる。

しかし,「*数とは何か？*」の問いが「*量に対するところの数の意味は？*」「*数と量の関係は？*」であるときは, ＜数は量の比＞がこれの答えになる。(八元数・十六元数は, ＜量をもたない数＞として, この問いに関わらない数ということになる。)

＜数は量の比＞の答えの内容になるものは,《量の対象化と量の表現・計算に使われる》ものとしての数の形式である。これは, つぎのものである：

・数は「量の比」—— $((Q, \mathbf{+}), \mathbf{\times}, (N, +, \times))$
・「等倍」 $1 \in N$ の存在： $\mathbf{q} \in Q$ に対し $\mathbf{q} \mathbf{\times} 1 = \mathbf{q}$
・「単位」 $\mathbf{u} \in Q$ の存在： $\mathbf{q} \in Q$ が $\mathbf{u} \mathbf{\times} n$, $n \in N$ の形に一意表現される
・$(\mathbf{q} \mathbf{\times} m) \mathbf{\times} n = \mathbf{q} \mathbf{\times} (m \times n)$
・$\mathbf{q} \mathbf{\times} m \mathbf{+} q \times n = \mathbf{q} \mathbf{\times} (m + n)$

そして, これから導かれる数本体 (N, ＋ , ×) の形式は, 特につぎのものである：

・単位元１の存在
・積に結合法則が成り立つ
・分配法則が成り立つ

おわりに

「*数とは何か？*」への答えは，数の定義を示すというふうにはならない。すなわち，数の意味を《自然数 → 分数 → ‥‥ → 複素数 → 四元数 → 八元数 → 十六進数》のように追っていくとき，そこには意味のシフトや複線化があり，全体に通底する形式として数の定義になるようなものが残らなくなる。

一方,「*数とは何か？*」の問いが「*数と量の関係は？*」であるときは,「数は量の比」が答えである。
八元数･十六進数で「数は量の比」からの逸脱が起こるが, この逸脱は「量をもてない」という逸脱である。そして量をもたない数について「数と量の関係は？」を問うのは無意味である。「*数と量の関係は？*」の問いは,「*数と量の関係をいま見ているところのその数と量の関係は？*」である。そしてこれへの答えは，「数は量の比」である。

本テクストは，「数は量の比」の総論である。「数は量の比」は，総論と各論を合わせせることで理解されるものになる。《自然数 → 分数 → ‥‥ → 複素数 → 四元数》の中のそれぞれの数で「数は量の比」を見ていくのが，各論である。
この各論は，以下のテクストにある：

『いろいろな数がつくられるしくみ』
『いろいろな数が「数」であること』
『四元数』
『量計算の論理』

註： 数 (N, +, x) が導く量の普遍対象 ((Ｎ, ＋), ×, (Ｎ, ＋ ,×)) の話は，さらに位の普遍対象 (Ｎ, ＋, ((Ｎ, ＋), ×, (Ｎ, ＋ ,×))) の話に進む。
本テクストは，「位」の主題を取り上げなかった。「数」の意味を考えることは，「数」の条件規定に関わるものとして「量」を考えることになる。しかし「位」は，「数の条件規定に関わるものを考える上で，量の上にさらにこれを考える必要がある」というものにはならないからである。
「位」については,『いろいろな数が「数」であること』の「位表現」の章，あるいは『量計算の論理』の「位」の章にあたられたい。

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。所属学会：日本数学教育学会

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための

「数」がわかる本 数学編 (1)

「数とは何か？」への答え

2011-01-20　初版アップロード

著者・サーバ運営　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

---

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp